Derivacija funkcije
Materijali za nastavu iz Matematike 1

Kristina Krulić Himmelreich i Ksenija Smoljak

2012/13

Definicija derivacije funkcije

Neka je funkcija f definirana u okolini točke x_0 i neka je x točka iz te okoline. Ako kvocijent

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ima graničnu vrijednost kada $x \to x_0$, onda tu graničnu vrijednost zovemo derivacijom funkcije f u točki x_0 i označavamo sa $f'(x_0)$. Dakle,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Definicija derivacije funkcije

Ako označimo s $\Delta x = x - x_0$ i s $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, onda prethodnu derivaciju funkcije u točki x_0 možemo zapisati ovako:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

Δx je prirast varijable x, a Δy prirast funkcije.
Ako funkcija f ima derivaciju u svakoj točki x intervala (a, b), onda kažemo da je funkcija f derivabilna na intervalu (a, b). U tom slučaju f' je nova funkcija koju zovemo derivacija funkcije f na intervalu (a, b) i

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

za svaki $x \in (a, b)$.

Primjeri derivacije funkcije po definiciji

Primjer

1. Derivacija konstante $f(x) = c$,

$$f^{'}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

2. $(cf)^{'} = c \cdot f^{'}$, c je konstanta
3. Derivacija linearne funkcije $f(x) = kx + l$, $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k(x+\Delta x) + l - kx - l}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k \end{aligned}$$

Primjeri derivacije funkcije po definiciji

Primjer

4. Derivacija funkcije $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x
\end{aligned}
$$

5. Derivacija funkcije $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2
\end{aligned}
$$

Primjeri derivacije funkcije

Derivacija potencije

Funkcija $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$ ima derivaciju

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Zadatak

Odredite po definiciji derivacije $f'(2)$ ako je

(a) $f(x) = 2x + 5$ (b) $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 1$

(c) $f(x) = \frac{1}{x}$ (d) $f(x) = \sqrt{2x}$

Zadatak

Odredite po definiciji derivaciju funkcije f u zadanom intervalu ako je:

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ (b) $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$

Pravila deriviranja

Neka su funkcije f i g derivabilne na istom intervalu (a, b). Tada za svaki $x \in (a, b)$ vrijedi:

1. derivacija zbroja i razlike $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
2. derivacija produkta $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
3. derivacija kvocijenta

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}, \; g(x) \neq 0$$

4. derivacija kompozicije funkcija
   $[f \circ g]'(x) = [f(g(x))]' = f'((g(x)) \cdot g'(x)$
5. derivacija inverzne funkcije

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Zadaci

Zadatak

Derivirajte slijedeće funkcije:

(a) $f(x) = x^5 - 7x^2 + 4x - \sqrt{2}$

(b) $f(x) = \sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}$

(c) $f(x) = (4x - 3)(x^2 + 2x - 3)$

(d) $f(x) = \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{2}{x}$

Zadatak

Derivirajte slijedeće funkcije:

$$(a) \quad f(x) = \frac{3}{x+1} \qquad (b) \quad f(x) = \frac{x-3}{1+\sqrt{x}}$$

$$(c) \quad f(x) = \frac{x^3 - 4}{x - \sqrt{x}} \qquad (d) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x} - x}{x+1}$$

Derivacije trigonometrijskih funkcija

Derivacije trigonometrijskih funkcija:

(a) $(\sin x)' = \cos x$

(b) $(\cos x)' = -\sin x$

(c) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

(d) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Zadatak

Nađite $f'(x)$ ako je

(a) $f(x) = x + \sin x - \sin 2$

(b) $f(x) = \cos x - x + \pi$

(c) $f(x) = x \cdot \operatorname{ctg} x$

(d) $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{tg} x}$

Derivacija eksponencijalne i logaritamske funkcije

Derivacija eksponencijalne funkcije je:

$$(a^x)' = a^x \, \ln a$$

Derivacija logaritamske funkcije je:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \, \ln a}$$

Za $a = e$, iz prethodnog, slijedi

$$(e^x)' = e^x$$

i

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Zadatak

Nađite $f'(x)$ ako je

(a) $f(x) = 2^x + \log_2 x - \ln 2 + e^2$

(b) $f(x) = x \cdot \ln x$

(c) $f(x) = 2^x \cdot \ln x$

(d) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

(e) $f(x) = x \ln x + \dfrac{e^x}{x}$.

Zadatak

Nađite $f'(x)$ ako je

(a) $f(x) = x^{\sqrt{2}}$

(b) $f(x) = 2^{\sqrt{2}} + \sin\sqrt{2} - x\sqrt{x}$

(c) $f(x) = \sqrt{x}\sin x + \operatorname{tg} x$

Derivacija arkus funkcija

Primjer (Derivacije arkus funkcija)

Koristeći pravilo

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

odredite derivacije arkus funkcija.

Rješenje:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2(\operatorname{arcctg} x)}} = \frac{-1}{1+\operatorname{ctg}^2(\operatorname{arcctg} x)} = \frac{-1}{1+x^2}$$

Tablica derivacija elementarnih funkcija

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
x^r	$rx^{r-1}, \; x > 0, \; r \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Derivacije višeg reda

Ako funkcija f ima derivaciju u svakoj točki intervala (a, b), onda je f' i sama funkcija definirana na tom intervalu. Njezinu derivaciju označavamo s f'' i nazivamo drugom derivacijom funkcije f.

Primjer

Ako je $f(x) = x^5 + 3x^3 - 2x$, onda je $f'(x) = 5x^4 + 9x^2 - 2$, $f''(x) = 20x^3 + 18x$.

Derivacije višeg reda

Druga derivacija funkcije f je derivacija prve derivacije. Označavamo je s f''. Derivacije trećeg i četvrtog reda označavamo s f''' i f^{IV}. Za veće brojeve n, derivaciju $n-$tog reda označavamo s $f^{(n)}$.

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Primjer

Za funkciju $f(x) = 2x^4 + 5x^3 - x^2 + 2x$ vrijedi:
$f'(x) = 8x^3 + 15x^2 - 2x + 2$
$f''(x) = 24x^2 + 30x - 2$
$f'''(x) = 48x + 30$
$f^{IV}(x) = 48$
$f^{(5)}(x) = 0$

Primjer

Za funkciju $f(x) = xe^x$ vrijedi:
$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$
$f''(x) = e^x + e^x + xe^x = (x+2)e^x$
$f'''(x) = e^x + e^x + e^x + xe^x = (x+3)e^x$.
Indukcijom se pokaže da vrijedi: $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$.

Derivacija složene funkcije

Podsjetimo se:
Derivaciju složene funkcije računamo formulom:

$$[f \circ g]'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Primjer

Izračunajte derivaciju složene funkcije $f(x) = (x-1)^2$.
Funkciju f možemo zapisati kao $f(x) = h(g(x))$, gdje je $g(x) = x - 1$, $h(x) = x^2$.
Dakle, $f^{'}(x) = [h(g(x))]' = h'(g(x)) \cdot g'(x) = 2(x-1) \cdot 1$.

Zadatak

Derivirajte složene funkcije:

(a) $y = \sin x^2, \quad y = \sin^2 x$
(b) $y = \arcsin \sqrt{x}, \quad y = \sqrt{\arcsin x}$
(c) $y = 2^{\operatorname{arctg} x} + cos^2 x + \sin kx,\ k \in \mathbb{R}$.

Derivacija implicitnih funkcija

Ako je funkcija zadana implicitnom formulom, onda njezinu derivaciju možemo naći primjenom pravila za derivaciju složene funkcije, ali moramo imati u vidu da je y funkcija od x.

Primjer

Derivacija funkcije $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ je $2x + \frac{2}{9} y \cdot y' = 0$, odnosno $y' = -\frac{9x}{y}$.

Zadatak

Derivirajte funkciju $y = f(x)$ zadanu implicitno

(a) $x^2 y - e^y + 5 = 0$

(b) $\operatorname{arctg} \frac{x}{y} - 5xy - y^2 = 0$.

Logaritamsko deriviranje

Logaritamsko deriviranje koristimo za deriviranje funkcija oblika

$$y = f(x)^{g(x)}.$$

Postupak kojim dolazimo do derivacije:

1. logaritmiramo obje strane
2. deriviramo obje strane, pri čemu y deriviramo kao složenu funkciju
3. sredimo dobiveni izraz

Logaritamsko deriviranje

Primjer

Odredite derivaciju funkcije $f(x) = x^{\sin x}$.
Ova funkcija je oblika $y = f(x)^{g(x)}$ pa slijedimo postupak logaritamskog deriviranja.

$$\ln f(x) = \sin x \cdot \ln x$$

Zatim deriviramo obje strane i dobijemo

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x},$$

odnosno

$$f'(x) = \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right) \cdot x^{\sin x}$$

Zadaci

Zadatak

Izračunajte derivaciju funkcije

(a) $f(x) = (\sin x)^x$

(b) $f(x) = x^{-x}$

Diferencijal funkcije f u točki x je izraz

$$df(x) = f^{'}(x)dx = f^{'}\Delta x.$$

U zadacima će nam biti važan slijedeći izraz

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f^{'}(x) \cdot \Delta x$$

Zadatak

Približno izračunajte:

(a) $\sqrt{17}$ (b) $\sqrt{15}$ (c) $\sin 31^\circ$ (d) $\sqrt[3]{7}$.

Definicija tangente i normale

Jednadžba tangente na krivulju $y = f(x)$ u točki x_0 je

$$y - f(x_0) = f^{'}(x_0)(x - x_0)$$

Normala na krivulju $y = f(x)$ u točki x_0 je pravac koji prolazi točkom $(x_0, f(x_0))$ i okomit je na tangentu u toj točki.
Jednadžba normale glasi

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

pri čemu smo pretpostavili da je $f^{'}(x_0) \neq 0$.
Ako je $f^{'}(x_0) = 0$, onda je jednadžba tangente $y = y_0$, a normale $x = x_0$.

Zadaci

Zadatak

Odredite jednadžbu tangente i normale krivulje u zadanoj točki

(a) $f(x) = x^2 + 5x - 6,\ T(2, y_0)$

(b) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2},\ T\left(\frac{\pi}{2}, y_0\right)$

(c) $x^2 + y^2 = 1,\ T\left(\frac{1}{2}, y < 0\right)$

(d) $xy^2 + \ln y = 1,\ T(1, 1)$

Zadatak

Napišite jednadžbu tangente krivulje u točkama u kojima su tangente paralelne zadanom pravcu te nacrtajte sliku ako je

(a) $y = 1 + 2\sqrt{-x},\ x + y - 3 = 0$

(b) $y = x^2 - 6x + 8,\ y = 2x - 3$

Zadaci

Zadatak

Napišite jednadžbu normale krivulje u točkama u kojima su normale paralelne zadanom pravcu te nacrtajte sliku ako je

(a) $y = -\dfrac{1}{x+1}$, $\dfrac{x}{8} + \dfrac{y}{2} = 1$

(b) $y = \sqrt{5 - x^2}$, $y = 2x$

Zadatak

Odredite tangentu koja prolazi ishodištem za krivulje te nacrtajte sliku ako je

(a) $y = -\dfrac{1}{x-1} + 3$

(b) $y = 2\ln x + 1$

Zadaci

Zadatak

Napišite jednadžbu tangenata krivulje povučenih iz zadane točke na krivulju

(a) $y = 2 - \dfrac{x^2}{2}, \; T\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

(b) $y = \dfrac{1}{x}, \; T(4, -2)$

Zadatak

Napišite jednadžbu tangente i normale krivulje $x^2 - 2x + y^2 = 0$ u točkama presjeka krivulje i pravca $y = \dfrac{x}{2}$ te nacrtajte sliku.

Zadatak

Za koju se vrijednost parametra a krivulje $y = ax^4$ i $y = \ln x$ dodiruju te nacrtajte sliku.

Kut između krivulja

Kut pod kojim se sijeku dvije krivulje definira se kao kut između njihovih tangenata povučenih u točkama sjecišta.

Neka je $T(x_0, y_0)$ točka sjecišta krivulja. Tada kut između krivulja definiramo kao

$$\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{k_{t_1} - k_{t_2}}{1 + k_{t_1} k_{t_2}} \right|,$$

gdje je $k_{t_1} = f_1'(x_0)$, a $k_{t_2} = f_2'(x_0)$.

Zadatak

Odredite kut pod kojim krivulja

(a) $y = \ln(x+1)$ siječe x os

(b) $y = e^x + 1$ siječe y os

te nacrtajte sliku.

Zadaci

Zadatak

Odredite kut pod kojim se sijeku krivulje

(a) $y = x^3$, $y = \frac{1}{x^2}$

(b) $y = 1 + \sin x$, $y = 1$

(c) $x^2 + y^2 = 5$, $y^2 = 4x$

(d) $y = \sqrt{2} \sin x$, $y = \sqrt{2} \cos x$

(e) $x^2 - y^2 = 5$, $4x^2 + 9y^2 = 72$

te nacrtajte sliku.

L'Hospitalovo pravilo

L'Hospitalovo pravilo za neodređeni oblik $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$: Neka su $f, g : (a, b) \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$ derivabilne funkcije i vrijedi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \text{ i } g'(x) \neq 0 \text{ za svaki } x \in (a, b) \backslash \{x_0\}.$$

Tada vrijedi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Zadatak

Izračunajte:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x - x^3}{2x - x^2}$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin 3x}{x + \sin 2x}$

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^3}$

(d) $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x$

Pad i rast funkcije

Interval (a, b) na kojem je funkcija rastuća ili padajuća nazivamo interval monotonosti funkcije f.

Neka je funkcija f derivabilna na intervalu (a, b). Tada vrijedi:

1. funkcija f je rastuća na intervalu (a, b) ako i samo ako je $f'(x) \geq 0$ za svaki $x \in (a, b)$
2. funkcija f je padajuća na intervalu (a, b) ako i samo ako je $f'(x) \leq 0$ za svaki $x \in (a, b)$
3. funkcija f strogo rastuća na intervalu (a, b) ako je $f'(x) > 0$ za svaki $x \in (a, b)$
4. funkcija f strogo padajuća na intervalu (a, b) ako je $f'(x) < 0$ za svaki $x \in (a, b)$.

Ekstremi funkcije i intervali monotonosti

Točku u kojoj je vrijednost derivacije funkcije jednaka nuli nazivamo stacionarna točka.

Minimum i maksimum funkcije:
Kažemo da je točka x_0 lokalni minimum funkcije f, ako postoji interval (c, d) koji sadrži točku x_0 tako da vrijedi

$$f(x_0) < f(x), \text{ za svaki } x \in (c, d), \, x \neq x_0.$$

Kažemo da je točka x_0 lokalni maksimum funkcije f, ako postoji interval (c, d) koji sadrži točku x_0 tako da vrijedi

$$f(x_0) > f(x), \text{ za svaki } x \in (c, d), \, x \neq x_0.$$

Minimum i maksimum funkcije zovemo ekstremima funkcije.

Ekstremi funkcije i intervali monotonosti

Nužan uvjet za lokalni ekstrem:

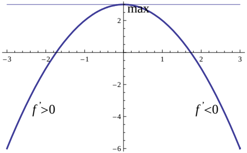
Ako funkcija u točki ekstrema ima derivaciju, onda ta derivacija mora biti jednaka nuli.

Traženje lokalnih ekstrema:

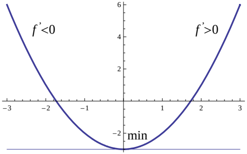
1. odredimo stacionarne točke funkcije f
2. odredimo intervale monotonosti
3. ako je x_0 stacionarna točka, onda se njezin karakter određuje na temelju rasta ili pada funkcije lijevo i desno od te točke, a oni su dani predzacima derivacije

Ekstremi funkcije i intervali monotonosti

Ako je lijevo od x_0 $f'(x_0) > 0$, a desno od x_0 $f'(x_0) < 0$, onda je x_0 lokalni maksimum funkcije f.

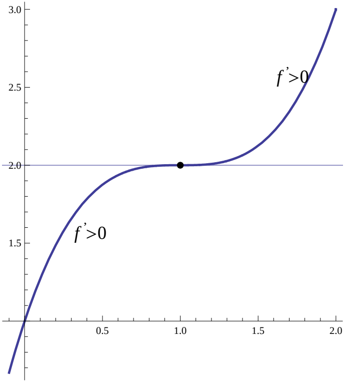


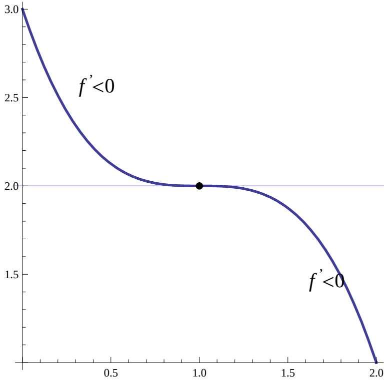
Ako je lijevo od x_0 $f'(x_0) < 0$, a desno od x_0 $f'(x_0) > 0$, onda je x_0 lokalni minimum funkcije f.



Ekstremi funkcije i intervali monotonosti

Ako je i lijevo i desno od x_0 $f'(x_0) > 0$, ($f'(x_0) < 0$) onda x_0 nije ekstrem funkcije f.





Globalni ekstrem

Ako tražimo maksimum ili minimum na cijelom intrevalu $[a, b]$, onda govorimo o globalnim ekstremima. Takav se ekstrem ne mora postizati u stacionarnoj točki unutar intervala, već i na njegovom rubu. U toj točki derivacija ne mora biti nula.

Nužan uvjet za globalni ekstrem:

Na intervalu $[a, b]$ funkcija može poprimiti ekstrem samo u točkama u kojima je:

1. derivacija jednaka nuli
2. derivacija ne postoji (točka prekida)
3. u krajevima intervala

Druga derivacija i ekstremi

Dovoljan uvjet za postojanje ekstrema možemo izraziti i pomoću druge derivacije.

Ispitivanje karaktera ekstrema pomoću druge derivacije:

1. izračunajmo f' i f''
2. riješimo jednadžbu $f'(x) = 0$ (njena rješenja su stacionarne točke)
3. ako je $f''(x_0) > 0$, onda funkcija u x_0 postiže minimum
4. ako je $f''(x_0) < 0$, onda funkcija u x_0 postiže maksimum
5. ako je $f''(x_0) = 0$, onda karakter točke x_0 istražujemo pomoću prve derivacije

Zadaci

Zadatak

Odredite lokalne ekstreme i intervale monotonosti funkcija

a) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$

b) $f(x) = x^2 e^{-x}$

c) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$.

Zadatak

Pomoću druge derivacije odredite lokalne ekstreme funkcija

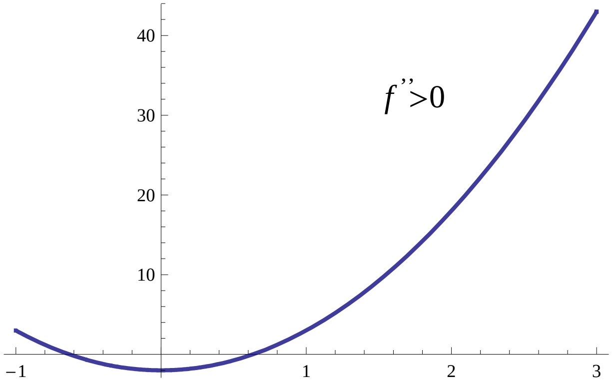
a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4$

b) $f(x) = 2x^2 - \ln x$

Konveksnost i konkavnost funkcije

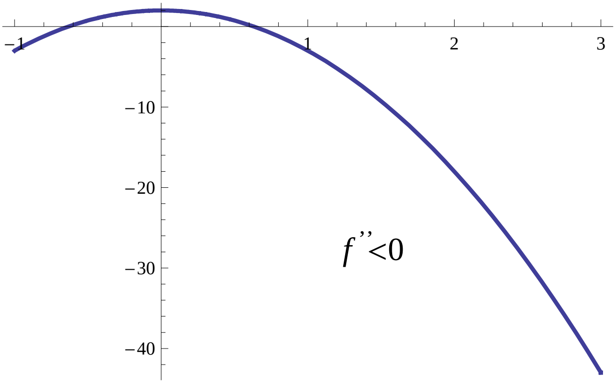
Konveksnost i konkavnost funkcije:

Za funkciju f kažemo da je konveksna na intervalu (a, b) ako na intervalu (a, b) vrijedi $f''(x) > 0$. Graf konveksne funkcije leži iznad tangente povučene u po volji odabranoj točki intervala.



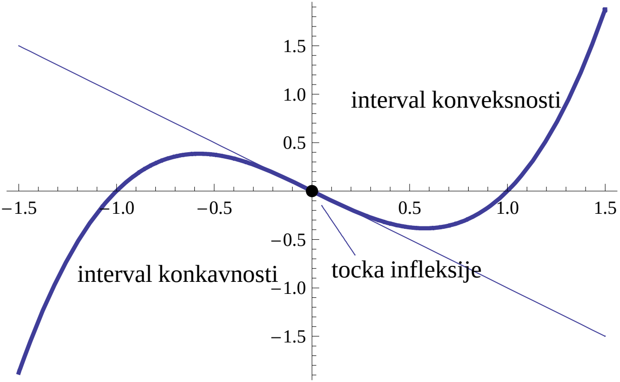
Konveksnost i konkavnost funkcije

Za funkciju f kažemo da je konkavna na intervalu (a, b) ako na intervalu (a, b) vrijedi $f''(x) < 0$. Graf konkavne funkcije leži ispod tangente povučene u po volji odabranoj točki intervala.



Konveksnost i konkavnost funkcije

Ako je na intervalima (a, b), (b, c) druga derivacija različitih preznaka, onda u točki b funkcija prelazi iz konveksne u konkavnu granu ili obratno. Točku b nazivamo točkom pregiba (infleksije) funkcije f.



Određivanje intervala konveksnosti, konkavnosti i točaka pregiba

Intervale konveksnosti, konkavnosti i točke pregiba određujemo na sljedeći način:

1. izračunamo f''
2. riješimo jednadžbu $f''(x) = 0$ (njezina rješenja su moguće točke pregiba)
3. na intervalima na kojima je $f''(x) > 0$ funkcija je konveksna, na ostalima je konkavna. Na granici između intervala konveksnosti i konkavnosti nalazi se točka infleksije.

Zadatak

Odredite intervale konveksnosti i konkavnosti i točke infleksije za funkciju

a) $f(x) = x^3 + \frac{1}{4}x^4$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

c) $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$.

Asimptote

Asimptota funkcije je pravac sa svojstvom da udaljenost između točke na grafu funkcije i tog pravca teži k nuli kada točka na grafu teži u beskonačnost.
Funkcija može imati vertikalne, horizontalne i kose asimptote.
Pravac $x = x_0$ je

- vertikalna asimptota funkcije f u točki x_0 s lijeve strane ako je

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

- vertikalna asimptota funkcije f u točki x_0 s desne strane ako je

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty.$$

Vertikalne asimptote se mogu nalaziti u točkama prekida funkcije ili u otvorenim rubovima područja definicije.

Asimptote

Pravac $y = y_0$ je

- horizontalna asimptota funkcije f u lijevoj strani ako je $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$
- horizontalna asimptota funkcije f u desnoj strani ako je $\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0$.

Pravac $y = kx + l$ nazivamo kosa asimptota funkcije f u lijevoj strani ako:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k,\ k \neq 0, \infty, -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = l,\ l \neq \infty, -\infty$$

Kosu asimptotu funkcije f u desnoj strani definiramo analogno.

Zadaci

Zadatak

Nađite asimptote sljedećih krivulja i skicirajte njihov graf

a) $y = \dfrac{x^2 + 1}{2x + 3}$

b) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

a) $y = \sqrt{x^2 + 4}$

Tok funkcije

Postupak crtanja grafa funkcije

1. Istraživanje funkcije f:
   - odredi se domena
   - odredi se ponašanje u rubnim točkama domene, te asimptote
   - ispitaju se svojstva parnosti, neparnosti, periodičnosti
   - odrede se nultočke i predznak
2. Istraživanje funkcije f':
   - izračuna se f'
   - riješi se jednadžba $f'(x) = 0$ i odrede stacionarne točke
   - odrede se intervali pada, odnosno rasta
   - odredi se karakter ekstrema i vrijednosti funkcije u tim točkama
3. Istraživanje funkcije f'':
   - izračuna se f'' i riješi se jednadžba $f''(x) = 0$
   - odrede se intervali konveksnosti i konkavnosti, te točke infleksije

Zadaci

Zadatak

Ispitajte tok funkcije:

a) $f(x) = x^3 + \frac{1}{4}x^4$

b) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

c) $y = xe^{-x}$

i nacrtajte graf.

Zadatak

Odredite domenu, nul-točke, ekstreme i točke infleksije, te nacrtajte graf funkcije

a) $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-1)(x+3)}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$.