Integrali
Materijali za nastavu iz Matematike 1

Kristina Krulić Himmelreich i Ksenija Smoljak

2012/13

Definicija primitivne funkcije i neodređenog integrala

Funkcija F je primitivna funkcija (antiderivacija) za funkciju f ako vrijedi $F'(x) = f(x)$. Neodređeni integral je skup primitivnih funkcija:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

gdje je C proizvoljna konstanta.

Primjer

Odredite skup funkcija čija je derivacija:
a) $y' = 1$, b) $y' = 2x$, c) $y' = e^x$, d) $y' = \sin x$.

Rješenje

a) $y(x) = x + C$, b) $y(x) = x^2 + C$,
c) $y(x) = e^x + C$, d) $y(x) = -\cos x + C$,
tj.

$$\int dx = x + C, \quad \int 2x\, dx = x^2 + C,$$

$$\int e^x\, dx = e^x + C, \quad \int \sin x\, dx = -\cos x + C.$$

Zadatak

Dokažite da je funkcija F primitivna funkcija za funkciju f, ako je:

$$F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C,$$

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Zadatak

Nađite funkciju čija je derivacija $y' = \cos x$, ako je za $x = \frac{\pi}{2}$ vrijednost funkcije 0.

Zadatak

Odredite primitivnu funkciju za funkciju $f(x) = 2x + 1$ koja ima vrijednost 1 za $x = 0$.

Tablica osnovnih integrala

$\int x^a \, dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C; \qquad a \neq -1;$
$\int 0 \, dx = C$
$\int 1 \, dx = \quad x + C$
$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln\lvert x\rvert + C, \quad x \neq 0$
$\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
$\int e^x \, dx = e^x + C$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
$\int \cos x \, dx = \sin x + C$
$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C, \quad a > 0$

Pravila integriranja

Iz definicije neodređenog integrala lako se dokazuju sljedeća svojstva:

1. $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$
2. $\int \; d[f(x)] = \int f'(x)\, dx = f(x) + C$
3. $\int Af(x)\, dx = A\int f(x)\, dx$, gdje je A konstanta različita od nule
4. $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

Zadatak

Koristeći tablicu osnovnih integrala i pravila integriranja izračunajte neodređene integrale:

a) $\int (2x + e^x - \frac{5}{\cos^2 x})\, dx$,

b) $\int (\frac{3}{x} + 2^x - 5^x \cdot 3^{-x})\, dx$,

c) $\int (6x + x^6 + 6^x)\, dx$,

d) $\int (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2})\, dx$,

e) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[n]{x})\, dx$,

f) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\, dx$, Newton-Leibnizova formula

(veza između određenog i neodređenog integrala)

Ako je $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, onda je

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Zadatak

Pomoću Newton-Leibnizove formule izračunajte određene integrale:

a) $\int\limits_{-1}^{1} x(x+1)\,dx$, b) $\int\limits_{0}^{\ln 2} e^x\,dx$,

c) $\int\limits_{1}^{2} \frac{1}{x}\,dx$, d) $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$,

e) $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, f) $\int\limits_{1}^{4} (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})\,dx$,

g) $\int\limits_{-1}^{2} |x|\,dx$, h) $\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{4}} |\cos x|\,dx$,

Metoda supstitucije

Ako u integralu $\int f(x)dx$ uvedemo supstituciju $x = g(t), dx = g'(t)dt$, dobivamo:

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt = H(t) + C = H(g^{-1}(x)) + C.$$

g^{-1} je inverzna funkcija funkcije g.

Primjer

Ako je $\int f(x)dx = F(x) + C$, dokažite da je $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Supstitucija: $ax + b = t, adx = dt, dx = \frac{1}{a}dt$.

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(t)dt = \frac{1}{a}F(t) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Zadatak

Koristeći rezultat prethodnog primjera i tablicu elementarnih integrala izračunajte integrale:

$a)\ \int (7x+1)dx$	$b)\ \int (2x-3)^{20}dx$	$c)\ \int \sqrt{2x-1}dx$
$d)\ \int \frac{dx}{3x+4}$	$e)\ \int e^{5x-1}dx$	$f)\ \int 2^{-x+1}dx$
$g)\ \int \sin(4x-3)dx$	$h)\ \int \cos(2+5x)dx$	$i)\ \int \frac{1}{\sin^2(3x-5)}dx$

Primjer

Dokažite da je $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$.

Supstitucija: $t = f(x), \quad dt = f'(x)dx$. Dakle,

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C.$$

Zadatak

Koristeći rezultat prethodnog primjera izračunajte integrale:

$a) \int \frac{2x-5}{x^2-5x+7} dx \qquad b) \int \operatorname{tg} x dx \qquad c) \int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$

$d) \int \frac{e^x}{1+e^x} dx \qquad e) \int \frac{x}{1+x^2} dx \qquad f) \int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$

Supstitucija i određeni integral

Određeni integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ metodom supstitucije možemo izračunati na dva načina:

I. Supstitucijom $x = g(t)$ izračunamo neodređeni integral $\int f(x)dx = F(x) + C$ i primijenimo Newton-Leibnizovu formulu:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

II. Pri supstituciji $x = g(t)$ ne moramo se vraćati na varijablu x ako

odredimo granice c i d za varijablu t:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt,$$

gdje je $a = g(c)$ i $b = g(d)$.

Primjer

Izračunajte integral:

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Rješenje

Supstitucijom $t = \sqrt{x}$ izračunamo $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2e^{\sqrt{x}} + C.$

Primijenimo Newton-Leibnizovu formulu: $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}}|_1^4 = 2e(e-1).$

Pokažimo da se nismo morali vraćati na varijablu x, jer ako je $x = 1$, onda je $t = 1$, a ako je $x = 4$, onda je $t = 2$, pa je

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_1^2 e^t\,dt = 2e^t|_1^2 = 2e(e-1)$$

Zadatak

Izračunajte integrale:

$$a)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx \qquad b)\ \int_1^2 (2x-3)^{20} dx \qquad c)\ \int_{-4}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-2x}} dx$$

$$d)\ \int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx \qquad e)\ \int_{-2}^{1} \sqrt{2-x} dx \qquad f)\ \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx$$

$$g)\ \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \qquad h)\ \int_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{3}}\ dx \qquad i)\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

Metoda parcijalne integracije

Metoda se sastoji od povoljnog rastava zadanog integrala u obliku:

$$\int f(x)dx = \int u(x) \cdot dv(x) = u(x) \cdot v(x) - \int v(x)du(x);$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x) \cdot dv(x) = u(x) \cdot v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$$

Kraći zapis: $\int udv = uv - \int vdu$.

Zadatak

Izračunajte integrale:

a) $\int \ln x \, dx$, b) $\int\limits_1^e \ln x \, dx$

Zadatak

Izračunajte integrale:

$a)$ $\int \arcsin x \, dx$ $b)$ $\int (2x+1) \ln x \, dx$ $c)$ $\int x^2 e^x \, dx$

$d)$ $\int x \sin(2x-5) \, dx$ $e)$ $\int (x-1) \cos 3x \, dx$ $f)$ $\int e^x \sin x \, dx$

$g)$ $\int\limits_0^1 \ln(x+1) \, dx$ $h)$ $\int\limits_0^1 x e^{-x} \, dx$ $i)$ $\int\limits_{-1}^0 \operatorname{arctg} x \, dx$

Integrali nekih jednostavnijih racionalnih funkcija

Primjer

Izračunajte:
$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx.$

Rješenje

Podintegralna funkcija se prikaže pomoću parcijalnih razlomaka:

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}.$$

Pomnožimo prethodnu jednakost s (x^2-a^2). Dobit ćemo
$1 \equiv A(x+a) + B(x-a)$, za svaki x.
Za $x = a$ dobivamo $A = \frac{1}{2a}$, a za $x = -a$ dobivamo $B = -\frac{1}{2a}$.

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right) = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

Zadatak

Izračunajte integrale:

$(a)\ \int \frac{2x+1}{x-1}dx$ $(b)\ \int \frac{x^2}{x-2}dx$ $(c)\ \int \frac{x^3+1}{x^2+5}dx$

$(d)\ \int \frac{2x-1}{x^2+4}dx$ $(e)\ \int \frac{1}{x^2-4}dx$ $(f)\ \int \frac{2x-1}{x^2-4x+3}\ dx$

$(g)\ \int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$ $(h)\ \int \frac{(x+1)^2}{x^3-x}dx$ $(i)\ \int \frac{x+2}{x^2-2x+1}dx$

Integrali nekih jednostavnijih trigonometrijskih funkcija

Za integrale trigonometrijskih funkcija koristimo identite:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{sin2x}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)].$$

Osim toga, koristimo i tzv. opću supstituciju za

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx,$$

pri čemu je $R(x, y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, a $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ su polinomi u dvije varijable.
Supstitucijom $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ dobiva se :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2 \operatorname{arctg} x, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Integral $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ svodi se na $\int R_1(t) dt$, gdje je $R_1(t)$ racionalna funkcija u varijabli t.

Primjer

Izračunajte $\int \frac{1}{4\sin x + 3\cos x + 5}\, dx$.

Rješenje

Pomoću opće supstitucije $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ i sređivanjem podintegralne funkcije dobiva se:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{4\sin x + 3\cos x + 5}\, dx &= \int \frac{dt}{(t+2)^2} \\ &= -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2} + C\end{aligned}$$

Zadatak

Izračunajte integrale:

(1) $\int \sin^2 3x \; dx$

(2) $\int \cos^4 x \; dx$

(3) $\int \sin^2 x \cos^2 x \; dx$

(4) $\int\limits_0^{2\pi} \sin 3x \cos 4x \; dx$

(5) $\int \frac{1}{\sin x} \; dx$

(6) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^7 x \; dx,$

(7) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \cos 3x \; dx,$

(8) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} \; dx$

Integrali nekih iracionalnih funkcija

Integrali koji se (određenom supstitucijom) svode na jedan od integrala oblika:

$$\int f(x,\ \sqrt{x^2 \pm a^2})\,dx \quad \text{ili} \int f(x,\ \sqrt{a^2 \pm x^2})\,dx$$

Zadatak

Izračunajte za $a > 0$:

$(a)\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \qquad (b)\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \qquad (c)\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx$

Rješenje

Integrale (a) i (b) možemo izračunati supstitucijom:

$x = a\sin t, \quad dx = a\cos t\,dt, \quad t = \arcsin\frac{x}{a}, \quad \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t.$

$(a)\ \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \int dt = t + C = \arcsin\frac{x}{a} + C$

$$\begin{aligned}(b)\ \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx &= a^2\int \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int (1+cos2t)\,dt \\ &= \frac{a^2}{2}(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}) + C\end{aligned}$$

Rješenje

(c) Supstitucija: $x+\sqrt{x^2\pm a^2}=t, \quad \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx=\frac{1}{t}\,dt$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx=\int \frac{1}{t}\,dt=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$$

Nepravi integral

Nepravi integral je integral kod kojeg područje integracije ima barem jednu beskonačnu granicu, ili kada funkcija unutar područja integracije nije omeđena (na primjer, ima vertikalnu asimptotu).
Neprave integrale računamo pomoću limesa.

Ako je nepravi integral konačan, kažemo da konvergira, u protivnom divergira.

Integrali s beskonačnim granicama

Primjer

Ispitajte konvergenciju integrala :

(a) $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\, dx, \quad s \in \mathbb{R};$ (b) $\int\limits_{-\infty}^{1} a^x\, dx, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$

Rješenje

$$(a) \text{ za } s \neq 1 \quad \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_1^{b} x^{-s}\, dx = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{1-s}}{1-s} \Big|_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{b^{1-s}-1}{1-s}.$$

Za $s > 1$ integral konvergira jer je $\lim\limits_{b\to\infty} b^{1-s} = 0$, pa je $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^s} = \frac{1}{s-1}$.

Rješenje

Za $s \leq 1$ integral divergira jer je $\lim\limits_{b\to\infty} b^{1-s} = \infty$.
Za $s = 1$ integral divergira jer je

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} \ln x \,|_1^b = \lim_{b\to\infty} [\ln b - \ln 1] = \infty - 0 = \infty.$$

$$(b) \quad \int\limits_{-\infty}^{1} a^x \, dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^1 a^x \, dx = \lim_{c\to-\infty} \tfrac{a^x}{\ln a} \,|_c^1$$
$$= \tfrac{1}{\ln a} \lim_{c\to-\infty} (a - a^c).$$

Za $a > 1$ integral konvergira jer je $\lim\limits_{c\to-\infty} a^c = 0$, pa je $\int\limits_{-\infty}^{1} a^x \, dx = a$.
Za $a < 1$ integral divergira jer je $\lim\limits_{c\to-\infty} a^c = \infty$.

Integrali neograničene funkcije

Primjer

Izračunajte: $\int\limits_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}}\, dx$

Rješenje

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}}\, dx &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{-2}^{-1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}}\, dx \\
&\quad + \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{-1+\delta}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}}\, dx \\
&= 3[\lim_{\varepsilon\to 0} \sqrt[3]{1+x}\Big|_{-2}^{-1-\varepsilon} + \lim_{\delta\to 0} \sqrt[3]{1+x}\Big|_{-1+\delta}^{0}] \\
&= 3[\lim_{\varepsilon\to 0}(\sqrt[3]{-\varepsilon} - \sqrt[3]{-1}) + \lim_{\delta\to 0}(\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{\delta})] \\
&= 6
\end{aligned}$$

Zadaci

Zadatak

Izračunajte:

$$(a) \int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \qquad (b) \int\limits_{-\infty}^{1} 3^x\,dx \qquad (c) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Zadatak

Izračunajte:

$(a) \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx; \quad (b) \int\limits_{-1}^{1} \frac{2}{x}\,dx$

Primjene određenog integrala

1. Površina krivolinijskog trapeza omeđenog dijelom krivulje funkcije $y = f(x), f(x) \geq 0$, i pravcima x = a, x = b, izražena je određenim integralom:

$$P = \int_a^b f(x) dx.$$

Ako je na intervalu (a, b) funkcija $f(x)$ negativna, tj. $f(x) < 0$, onda je površina krivolinijskog trapeza predstavljena integralom:

$$P = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Površina krivolinijskog trapeza

Ako je lik kojemu želimo izračunati površinu omeđen dijelovima krivulja $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$ tj.

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\},$$

onda je površina skupa S:

$$P(S) = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Površina krivolinijskog trapeza

Ako je lik kojemu želimo izračunati površinu omeđen dijelovima krivulja $x = g_1(y)$ i $x = g_2(y)$ tj.

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\},$$

onda je površina skupa S:

$$P(S) = \int_c^d (g_2(y) - g_1(y))dy.$$

Površina krivolinijskog trapeza

Zadatak

Izračunajte i grafički prikažite površinu lika omeđenog sa:

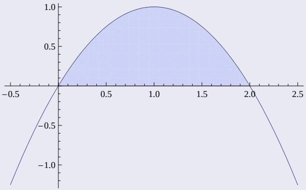
a) $y = 2x - x^2, y = 0$;

b) $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1$;

c) $y = \ln x, x = e, y = 0$.

Rješenje

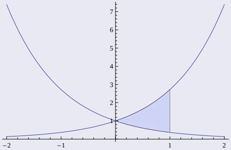
a) $P = \int\limits_0^2 (2x - x^2)dx = (x^2 - \frac{x^3}{3})\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$.



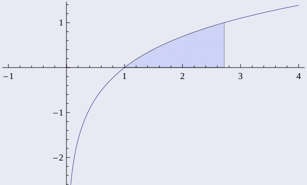
Površina krivolinijskog trapeza

Rješenje

b) $P = \int\limits_0^1 (e^x - e^{-x})dx = (e^x + e^{-x})\Big|_0^1 = e - 2 + \frac{1}{e}.$



c) $P = \int\limits_1^e \ln x dx = x(\ln x - 1)\Big|_1^e = 1.$



Zadatak

Izračunajte i grafički prikažite površinu lika omeđenog sa:

a) $y = 3 - 2x - x^2, y = 0;$
b) $y = x^2, y = 2 - x^2;$
c) $y = x^2 + 4x, y = x + 4;$
d) $4y = x^2, y = 4x;$
e) $y = |x - 2| - 1, y = 2;$
f) $y = \sin x, y = \cos x, x = 0, x = \frac{\pi}{2};$
g) $y = \arcsin x, y = \frac{\pi}{4}, x = -1, x = 0;$
h) $y = \operatorname{arctg} x, y = 0, x = 0, x = 1.$

Duljina luka krivulje (rektifikacija)

Duljina luka krivulje $y = f(x), x \in [a, b]$ je:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Duljina luka krivulje $x = g(y), y \in [c, d]$ je:

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + (x'(y))^2}\, dy = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy.$$

Duljina luka krivulje (rektifikacija)

Zadatak

Pomoću integrala izračunajte opseg kružnice polumjera $r = 3$.

Rješenje

Jednažba kružnice je : $x^2 + y^2 = 9$, te je $y' = -\frac{x}{y}$, $(y')^2 = \frac{x^2}{9-x^2}$, tj.

$$\mathcal{O} = 4\int\limits_0^3 \sqrt{1 + \frac{x^2}{9-x^2}}\, dx = 12\int\limits_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\, dx = 12 \arcsin \frac{x}{3}\Big|_0^3 = 6\pi.$$

Duljina luka krivulje (rektifikacija)

Zadatak

Izračunajte duljinu luka krivulje $y = \ln(\sin x), x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$.

Rješenje

$y' = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow 1 + (y')^2 = \frac{1}{\sin^2 x}$, tj.

$$l = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin x}\, dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right|\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \ln 3.$$

Zadatak

Izračunajte duljinu luka krivulje:

(a) $y = x\sqrt{x},\ x \in [0, 5]$

(b) $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y,\ y \in [1, e]$

Volumen (kubatura) rotacijskih tijela

Rotacija oko osi apscisa (osi x):

Ako skup $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$, f je neprekidna funkcija, rotira oko osi apscisa dobivamo tijelo čiji je volumen:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x)\, dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Volumen (kubatura) rotacijskih tijela

Rotacija oko osi ordinata (osi y):

Ako skup $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ 0 \leq x \leq g(y)\}$, g je neprekidna funkcija, rotira oko osi ordinata dobivamo tijelo čiji je volumen:

$$V_y = \pi \int_c^d x^2(y)\, dy = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy.$$

Ako skup $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$, f je neprekidna funkcija, rotira oko osi ordinata dobivamo tijelo čiji je volumen:

$$V_y = 2\pi \int_a^b x \cdot y\, dx = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx.$$

Volumen (kubatura) rotacijskih tijela

Zadatak

Odredite volumen tijela koje nastaje rotacijom elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$
(a) oko osi x, (b) oko osi y.

Rješenje

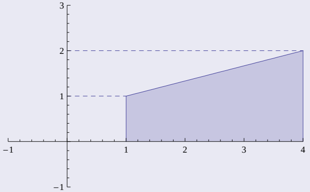
(a) $V_x = \pi \int\limits_{-2}^{2} y^2 dx = \pi \int\limits_{-2}^{2} (1 - \frac{x^2}{4}) dx = \pi (x - \frac{1}{4}\frac{x^3}{3})\Big|_{-2}^{2} = \cdots = \frac{8\pi}{3}.$

(b) $V_y = \pi \int\limits_{-1}^{1} x^2 dy = \pi \int\limits_{-1}^{1} 4(1 - y^2) dy = 4\pi (y - \frac{y^3}{3})\Big|_{-1}^{1} = \cdots = \frac{16\pi}{3}.$

Volumen (kubatura) rotacijskih tijela

Zadatak

Pomoću integrala izračunajte volumen rotacijskog tijela nastalog rotacijom skupa sa slike:



(a) oko osi x, (b) oko osi y.

Zadatak

Odredite volumen rotacijskog tijela nastalog rotacijom krivulje $y = e^{-x}$ od $x = 0$ oko osi x.