Linearna algebra
Materijali za nastavu iz Matematike 1

Kristina Krulić Himmelreich i Ksenija Smoljak

2012/13

Uvod

Matrica:

- matematički objekt koji se sastoji od brojeva koji su raspoređeni u retke i stupce
- zapisuje se u obliku pravokutne sheme, a brojeve od kojih se sastoji zovemo **elementima matrice**

Matrica A sa m redaka, n stupaca i s elementima a_{ij} zapisuje se kao

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Takvu matricu zovemo $m \times n$ matrica, što zapisujemo $A \in \mathcal{M}_{m,n}$

Uvod

- matricu sa samo jednim retkom zovemo **matrica redak** ili jednoretčana matrica
- matricu sa samo jednim stupcem zovemo **matrica stupac** ili jednostupčana matrica
- ako je broj redaka jednak broju stupaca kažemo da je A **kvadratna matrica** reda n i zapisujemo $A \in \mathcal{M}_n$

Primjer

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 9 & 6 & 1 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

Uvod

Jednakost matrica:
matrica A je jednaka matrici B ako imaju isti broj redaka i isti broj stupaca i za njihove elemente vrijedi $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i, j$. Svaki element jedne matrice jednak je odgovarajućem elementu druge matrice.

Nul-matrica je matrica čiji je svaki element jednak nuli.

Dijagonalna matrica je kvadratna matrica za koju vrijedi $(\forall i \neq j)(a_{ij} = 0)$

Jedinična matrica je dijagonalna matrica kojoj su svi elementi na dijagonali jednaki 1. Označavamo je sa I ili E.

Primjer

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zbrajanje matrica

Neka su $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}$. Matricu $C \in \mathcal{M}_{m,n}$ s elementima $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i, j$ zovemo **zbrojem matrica** A i B i pišemo $C = A + B$.

Primjer

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 3+0 & 5+2 \\ 7+0 & 0+3 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Svojstva operacije zbrajanja:

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$ — asocijativnost
2. $A + B = B + A$ — komutativnost

Operacije s matricama

Množenje matrica sa skalarom

matrica se množi sa skalarom (brojem) tako da se svaki element matrice pomnoži s tim brojem, $kA = B$, gdje je $b_{ij} = ka_{ij}$, $\forall i, j$.

Primjer

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$2A = \begin{bmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot 3 & 2\cdot 5 \\ 2\cdot 7 & 2\cdot 3 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 5 & 2\cdot 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 14 & 6 & 4 \\ 2 & 10 & 18 \end{bmatrix}$$

Svojstva operacije množenja matrica sa skalarom:

1. $c(A + B) = cA + cB$ distributivnost množenja prema zbrajanju
2. $(k + l)A = kA + lA$ distributivnost množenja prema zbrajanju
3. $(kl)A = k(lA)$

Operacije s matricama

Transponiranje matrica
Neka je $A \in \mathcal{M}_{m,n}$. Matrica $A^T \in \mathcal{M}_{n,m}$ naziva se **transponirana matrica** matrici A, ako je svaki redak od A^T jednak odgovarajućem stupcu matrice A.

Primjer

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Svojstva operacije transponiranja matrica:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(AB)^T = B^T A^T$

Zadaci

Zadatak

Ako je $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ odredite

(a) $3A + B^T$

(b) $2A^T + 3B$.

Zadatak

Odredite matricu X za koju vrijedi $2A - 3X = B$, ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$,
$B = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Zadatak

Odredite matricu X koja zadovoljava uvjet $3A + 2X = I$, gdje je I jedinična matrica, a $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 4 & 3 & -8 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

Zadatak

Odredite X iz uvjeta $2A + \frac{1}{3}X = C$, ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} 10 & -8 & -5 \\ 7 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Operacije s matricama

Množenje matrica
Neka je $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ i $B \in \mathcal{M}_{n,p}$. **Produkt matrica** A i B je matrica $C \in \mathcal{M}_{m,p}$ kojoj su elementi određeni formulom

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \; 1 \leq i \leq m, \; 1 \leq j \leq p.$$

Produkt matrica A i B definiran je samo onda kad je broj stupaca matrice A jednak broju redaka matrice B. Za takve dvije matrice kažemo da su **ulančane**.

Zadatak

Odrediti $m, n \in \mathbb{N}$ iz uvjeta

(a) $A_{3,4} \cdot B_{4,5} = C_{m,n}$

(b) $A_{2,3} \cdot B_{m,n} = C_{2,6}$

Zadaci

Zadatak

Izračunajte produkt matrica $A \cdot B$ i $B \cdot A$, ako postoji, za:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$.

Svojstva množenja matrica

1. $A(B+C) = AB + AC$
2. $(B+C)A = BA + CA$
3. $A(BC) = (AB)C$
4. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

Uočimo:

- ne vrijedi zakon komutativnosti
- postoje matrice A i B za koje produkt $A \cdot B$ postoji, a $B \cdot A$ ne postoji, ili obratno
- postoje matrice A i B za koje vrijedi $A \cdot B = 0$ iako ni A ni B nisu nul-matrice.

Polinom matrice

Ako je A kvadratna matrica, izraz

$$P_n(A) = a_n \cdot A^n + a_{n-1} \cdot A^{n-1} + \cdots + a_0 \cdot I$$

je **polinom matrice** A.
Ako je $P_n(A)$ nul-matrica, onda A zovemo **nul-točkom** polinoma $P_n(x)$.

Zadatak

Dokažite da je A nul-točka polinoma $P_2(x) = x^2 - 4x - 5$, ako je
$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Determinanta matrice

Kvadratnoj matrici A reda n pridružujemo broj koji nazivamo **determinanta matrice** A, a računamo ga na sljedeći način:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}, \; det(A) = a_{11} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \; det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Za matrice reda većeg od 2 koristimo razvoj determinante po retku ili stupcu koji se još naziva i **Laplaceov razvoj determinante**.

Laplaceov razvoj determinante

$n > 2 \; : \; A \in \mathcal{M}_n$,

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}}_{\text{razvoj po } j\text{-tom stupcu}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}}_{\text{razvoj po } i\text{-tom retku}}$$

- A_{ij} nazivamo **algebarski komplement**
- $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
- M_{ij} se naziva **minora**, to je determinanta matrice nižeg stupnja koja se dobiva izostavljanjem i-tog retka i j-tog stupca.

Primjer

Primjer

Izračunajte $det(A)$ ako je

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$;

(b) $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

Primjer

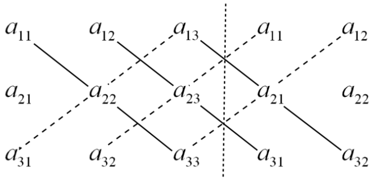
Izračunajte $det(A)$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(a) razvijajući po 1. retku;

(b) razvijajući po 2. stupcu.

Sarrusovo pravilo

Samo za determinante **3. reda** vrijedi tzv. Sarrusovo pravilo pomoću kojeg možemo brže izračunati determinantu.



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Primjer

Prethodni primjer riješite koristeći Sarrusovo pravilo.

Svojstva determinanti

- $det(A^T) = det(A)$.
- Ako u determinanti zamijenimo dva retka (stupca), determinanta mijenja predznak.
- Ako matrica ima dva jednaka retka ili stupca, onda je njena determinanta jednaka 0.
- Ako se jedan redak (stupac) determinante pomnoži skalarom, onda se cijela determinanta množi tim skalarom.
- Ako matrica ima redak ili stupac sastavljen od samih nula, onda je njena determinanta jednaka 0.
- Determinanta trokutaste matrice (matrica kojoj su elementi iznad ili ispod dijagonale jednaki 0) jednaka je produktu elemenata na dijagonali.

Svojstva determinanti

- Ako nekom retku (stupcu) matrice dodamo neki drugi redak (stupac) pomnožen sa skalarom, vrijednost determinante se neće promijeniti.
- Binet-Cauchy teorem: $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$.

Zadatak

Ako je $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(a) Izračunajte M_{23}, M_{33}, A_{23}, A_{33}.

(b) Koristeći svojstva izračunajte D.

Zadatak

Izračunajte: (a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, (b) $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

Zadatak

Izračunajte: (a) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 5 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, (b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$.

Elementarne transformacije matrice

Elementarne transformacije nad retcima (stupcima):

1. Zamjena dva retka (stupca)
2. Množenje retka (stupca) skalarom različitim od nule
3. Dodavanje nekog retka (stupca) nekom drugom retku (stupcu)

Napomena

Posljedica uzastopne primjene transformacije (3) je dodavanje nekom retku (stupcu) linearne kombinacije ostalih redaka (stupaca), što ćemo također smatrati elementarnom transformacijom.

Rang matrice

Matrica A reda n je **regularna** ako je $det(A) \neq 0$.
Ako je $det(A) = 0$ kažemo da je A **singularna**.

Rang matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ jednak je maksimalnom broju linearno nezavisnih redaka (stupaca) matrice A.

Posljedica: $r(A) = r(A^T)$

- Nul-matrica ima rang 0.
- Za $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ je $r(A) \leq \min\{m, n\}$.
- Ako je $A \in \mathcal{M}_n$ i $det(A) \neq 0$, onda je $r(A) = n$.

Ekvivalentne matrice

Za dvije matrice istog tipa kažemo da su **ekvivalentne** ako imaju isti rang, to jest

$$A, B \in \mathcal{M}_{m,n} : A \sim B \Leftrightarrow r(A) = r(B).$$

Teorem

Ako su A i B ekvivalentne, onda se matrica B može dobiti pomoću elementarnih transformacija matrice A.

Primjenom elementarnih transformacija zadane matrice, matricu možemo svesti na trapezoidni ili na trokutasti oblik. Iz tih oblika se lako određuje rang matrice.

Zadaci

Zadatak

Dokažite da su matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ regularne i odredite njihov rang.

Zadatak

Dokažite da su matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ singularne i odredite njihov rang.

Zadaci

Zadatak

Odredite rang matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 12 & 1 \end{bmatrix}$.

Zadatak

Odredite rang matrica:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$.

Definicija i svojstva inverzne matrice

Matrica A^{-1} je **inverzna matrica** kvadratne matrice A ako je $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, gdje je I jedinična matrica.

Teorem

Inverzna matrica A^{-1} postoji ako i samo ako je matrica A regularna ($det(A) \neq 0$).

Svojstva inverzne matrice:

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$, $k \neq 0$
4. $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

Određivanje inverzne matrice

Inverznu matricu možemo odrediti na dva načina:

(I) (Gaussov postupak) pomoću elementarnih transformacija samo nad retcima

$$[A|I] \sim \cdots \sim [I|A^{-1}]$$

(II) (Kramerovo pravilo)

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot A^* = \frac{1}{det(A)} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T$$

gdje je A^* adjungirana matrica, A_{ij} algebarski komplement matrice.

Zadaci

Inverz za opću matricu drugog reda:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \; ad - cb \neq 0$$

Zadatak

Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Odredite A^{-1} na oba načina.

Zadatak

Neka je $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}$. Odredite A^{-1}.

Matrične jednadžbe

Matrične jednadžbe su jednadžbe oblika $A \cdot X = B$ ili $X \cdot A = B$, gdje su A i B zadane, poznate matrice, a X je matrica nepoznanica.

Riješavamo ih množenjem s desna ili lijeva inverznom matricom A^{-1}, ako je A regularna matrica.

Ako A nije regularna ($det(A) = 0$), onda jednadžba ili nema rješenja ili ima beskonačno mnogo rješenja.

OPREZ!

- Množenje matrica nije komutativno.
- Važno je da li se množi s desna ili s lijeva!

Zadaci

Zadatak

Riješite matrične jednadžbe:

(a) $A \cdot X = B$, ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

(b) $X \cdot A = B$, ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

(c) $A \cdot X \cdot B = C$, ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

(d) $A \cdot X \cdot (B - I) = C$, ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$,

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Primjer

U nekom kavezu su zečevi i patke. Ako znamo da u kavezu ima 35 glava i 94 noge, odredite broj zečeva u kavezu.

Metode rješavanja:

1. Metoda suprotnih koeficijenata
2. Metoda komparacije
3. Metoda supstitucije
4. Grafička metoda

Matrični zapis sustava linearnih jednadžbi

Sustav od m jednadžbi s n nepoznanica

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad &\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Uvođenjem matrice sustava $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, vektora rješenja $x \in \mathbb{R}^n$ i vektora desne strane sustava $b \in \mathbb{R}^m$ sustav prelazi u matrični problem

$$
Ax = b, \ \text{to jest} \ \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

Rješenja linearnih sustava

Rješenje sustava je svaka $n-$torka koja zadovoljava svaku jednadžbu sustava.

Sustav linearnih jednadžbi je:

- nerješiv (nema rješenje)
- rješiv:
    - ima jedinstveno rješenje (određen sustav)
    - ima beskonačno mnogo rješenja (neodređen sustav)

Kronecker-Capellijev teorem

Teorem (Kronecker-Capellijev teorem)

Sustav ima rješenje ako i samo ako je rang matrice sustava jednak rangu proširene matrice, tj. $r(A) = r(A|b)$, gdje je

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Ako je $r(A) = r(A|b) = n$, (n je broj nepoznanica), onda sustav ima jedinstveno rješenje.

Homogeni i nehomogeni sustavi

- Sustav čija je matrična jednadžba oblika $Ax = b$, b različit od nul-vektora, zove se **nehomogen** sustav.
- Sustav kod kojeg je vektor desne strane **nul-vektor**, to jest čija je matrična jednadžba oblika $Ax = 0$, zove se **homogen sustav**.

Za homogen sustav vrijedi:

- Kako je $r(A) = r(A|b)$ sustav uvijek ima rješenja.
- Ako je $r(A) = n$, sustav ima samo trivijalno rješenje.
- Ako je $r(A) < n$, sustav ima ∞ rješenja.
- $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ je trivijalno ili nul-rješenje.
- Ako je matrica A regularna (to jest $\det(A) \neq 0$) sustav ima samo trivijalno rješenje.

Metode rješavanja

- Opći postupak za rješavanje sustava je *Gaussov postupak* (korištenje elementarnih transformacija matrice samo nad retcima).
- Ako je matrica sustava regularna (to jest, $\det(A) \neq 0$), onda se sustav može riješiti
  - tzv. *Cramerovim pravilom*: $x_i = \frac{D_i}{D}$, gdje je $D = \det(A)$, D_i determinanta koja se dobiva iz D kada se i-ti stupac zamijeni stupcem desne strane tj. $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.
  - množenjem sa inverznom matricom A^{-1} pa dobijemo matričnu jednadžbu $X = A^{-1}b$.

Zadatak

Riješite sustave linearnih jednadžbi:

(a)
$$\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 3 \\ 2x & - & y & = & 1 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & y & - & 4z & = & 10 \\ 3x & - & 3y & - & z & = & 13 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 2 \\ 3x & - & 3y & + & 2z & = & 3 \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 3 \\ -2x & & & + & z & = & -2 \\ x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ -x & + & 2y & + & 12z & = & 1 \end{array}$$

Zadaci

Zadatak

Riješite sustave linearnih jednadžbi:

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 0 \\ -x & + & y & = & 0 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ 3x & + & y & - & z & = & 2 \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 5 \end{array}$$

(e)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & 5z & = & 0 \\ 3x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array}$$

Zadatak

Riješite sustave linearnih jednadžbi:

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 5x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 4 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 5x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 4 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 0 \end{array}$$

Zadatak

U ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$ riješiti sustave:

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & ay & - & 2z & = & 2 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & a \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 4 \end{array}$$