Skupovi brojeva
Materijali za nastavu iz Matematike 1

Kristina Krulić Himmelreich i Ksenija Smoljak

2012/13

Podsjetnik teorije skupova

Operacije sa skupovima:

- $A \cup B = \{x \,:\, x \in A \vee x \in B\}$ (unija skupova)
- $A \cap B = \{x \,:\, x \in A \wedge x \in B\}$ (presjek skupova)
- $A \setminus B = \{x \,:\, x \in A \wedge x \notin B\}$ (razlika skupova)
- $\bar{A} = A^c = S \setminus A$ za $A \subset S$ (komplement skupa)

Partitivni skup je skup svih podskupova zadanog skupa tj.

$$\mathcal{P}(A) = \{X \,:\, X \subseteq A\}.$$

Kardinalni broj je broj elemenata konačnog skupa A kojeg označamo sa $k(A)$.

Zadaci za vježbu iz Skupova brojeva

Tipovi intervala:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (zatvoreni interval-segment)
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (poluotvoreni interval)
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (poluotvoreni interval)
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (otvoreni interval)

Zadaci za vježbu iz Skupova brojeva

Zadatak

Zadani su podskupovi (intervali) realnih brojeva:

$$A = (-\infty, 3],\ B = (-1, \infty),\ C = [-3, 5].$$

Prikažite zadane skupove na brojevnom pravcu, a zatim odredite skupove (komplement skupa promatramo u odnosu na skup $\mathbb{R}$):

$$A \cup B \cup C,\ A \cap B \cap C,\ (\bar{A} \cap B) \cup C,\ (A \cup B) \cap \bar{C},$$

te provjerite sljedeće skupovne relacije

(a) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (b) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

(c) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

(d) $(A \cup C) \setminus B \subset (A \setminus B) \cup (C \setminus B)$.

Zadaci za vježbu iz Skupova brojeva

Zadatak

Odredite elemente skupova:

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x - 4 = 0\}$

(b) $B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 + 3x - 4 = 0\}$

(c) $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$

(d) $E = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 + x - \frac{1}{4} = 0\}$

Zadatak

Na brojevnom pravcu prikažite skupove

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 3 \geq 0\}$

(b) $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 < 0\}$

(c) $C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 1 > 0\}$

(d) $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 < 0\}$

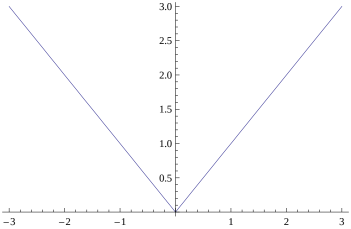
(e) $E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 4x > 0\}$

Definicija apsolutne vrijednosti

Apsolutna vrijednost realnog broja je funkcija $|\,|:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ definirana s

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{za } x \geq 0, \\ -x, & \text{za } x < 0. \end{cases}$$

Graf funkcije $y = |x|$



Svojstva apsolutne vrijednosti

Za apsolutnu vrijednost vrijedi:

(a) $|x| < r \quad \Leftrightarrow \quad -r < x < r \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-r, r)$

(b) $|x| > r \quad \Leftrightarrow \quad x > r \ \vee \ x < -r \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -r) \cup (r, \infty)$

(c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(d) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \ y \neq 0$

(e) $\sqrt{x^2} = |x|$

Primjer

(a) $|-3| = 3$

(b) $|2 - \pi| = \pi - 2$

(c) $|-1 + \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1$

(d) $|2 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2}$

Zadaci

Zadatak

Riješite jednadžbe u skupu realnih brojeva:

(a) $|x-3|=2$ (b) $|2x^2-3|=5$

(c) $x^2-2|x|-3=0$ (d) $|x-2|+|x+3|=5$

(e) $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}-\sqrt{x^2-4x+4}=4$

Zadatak

U skupu realnih brojeva riješite nejednadžbe i rješenja prikažite na brojevnom pravcu:

(a) $|x|<5$ (b) $|2x-3|>7$

(c) $|x-1|+|x+2|<4$ (d) $\left|\frac{x-4}{x+5}\right|>2$

Zadaci

Zadatak

U skupu cijelih brojeva riješite nejednadžbe:

(a) $1 \leq |x+1| \leq 2$

(b) $2 - |x| < 5$

(c) $|x^2 - 2x| > 1$

Zadatak

Računski riješite sustave jednadžbi:

(a) $$\begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 1 \\ x & + & |y| & = & 2 \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 1 \\ & & y & = & |x^2 - x| \end{array}$$

Kartezijev produkt realnih brojeva

Kartezijev produkt skupova X i Y, u oznaci $X \times Y$, je skup svih mogućih uređenih parova takvih da je prva komponenta iz skupa X, a druga iz skupa Y. Zapisujemo:

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Zadatak

Odredite $A \times B$, $B \times A$, A^2, B^2 ako je

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - |x| = 0\},$$

$$B = \{y \in \mathbb{R} : |y + 1| = 5\}.$$

Zadatak

Zadani su skupovi $A, B \subset \mathbb{R}$. U koordinatnoj ravnini nacrtajte skup $A \times B$ ako je

(a) $A = (2, 7]$, $B = [-2, 3)$

(b) $A = \{x : |x| \leq 4\}$, $B = \{y : |y| > 2\}$.

Zadatak

U koordinatnoj ravnini nacrtajte skup S ako je

(a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + 1\}$

(b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2x - 3\}$

(c) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x|\}$

(d) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4x + y^2 + 2y + 1 \leq 0\}$

(e) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 6y + 8 \geq 0\}$

(f) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 < 36\}$

Zadaci iz Kartezijevog produkta

Zadatak

Nacrtajte skupove P, Q i $P \cap Q$ ako je

(a) $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 - y^2 < 1\}$, $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + 4y^2 \leq 4\}$,

(b) $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 \leq 0\}$,
$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 0 \leq y < x - 2\}$,

(c) $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x > 0, \, x - 3 \leq y \leq 1\}$,
Q$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 \leq 0\}$.

Zadatak

U koordinatnoj ravnini nacrtajte skup S i izračunajte njegovu površinu:

(a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, |1 - x| \leq 2, \, |y + 1| \leq 1\}$,

(b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x \leq 2, \, -1 \leq y \leq 3, \, y \leq x + 1\}$.

Skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ je skup brojeva sa sljedećim svojstvima:

(a) sadrži skup realnih brojeva.

(b) sadrži broj i za koji vrijedi $i^2 = -1$.

(c) operacije zbrajanja i množenja zadovoljavaju svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti.

Algebarski prikaz kompleksnog broja

Kompleksni brojevi su brojevi oblika $z = x + iy$, gdje su $x, y \in \mathbb{R}$.

- $Re\ z = x$ je realni dio kompleksnog broja z
- $Im\ z = y$ je imaginarni dio kompleksnog broja z

Jednakost kompleksnih brojeva

Dva kompleksna broja, $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$, su jednaka ako im se podudaraju realni i imaginarni dijelovi: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \;\&\; y_1 = y_2$

Operacije u skupu $\mathbb{C}$

1. Zbrajanje kompleksnih brojeva: $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$
2. Oduzimanje kompleksnih brojeva: $z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$
3. Množenje kompleksnih brojeva:
   $z_1 \cdot z_2 = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + i(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$

Operacije u skupu $\mathbb{C}$

Potencije imaginarne jedinice:

$$\begin{array}{llll} i^0 = 1, & i^1 = i, & i^2 = -1, & i^3 = -i, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ i^{4k} = 1, & i^{4k+1} = i, & i^{4k+2} = -1, & i^{4k+3} = -i, \quad k \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Kompleksno konjugirani broj broja z:

$$\bar{z} = x - iy$$

Modul kompleksnog broja:

$$|z| = \sqrt{(Re\ z)^2 + (Im\ z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dijeljenje kompleksnih brojeva:

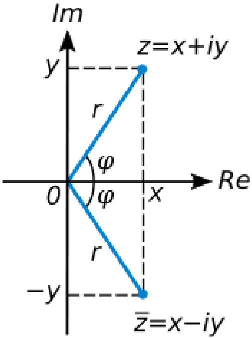
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \text{ za } z_2 \neq 0$$

Primjer

$$\frac{3+2i}{1-2i} = \frac{3+2i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{3+2i+6i+4i^2}{1+4} = \frac{-1+8i}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{8}{5}i$$

Kompleksna ravnina

Kompleksnom broju $z = x + iy$ jednoznačno je pridružen uređen par $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, odnosno točka $T = (x, y)$ u ravnini:



Ovu ravninu nazivamo kompleksna ravnina ili Gaussova ravnina.

Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja

Neka je $T(x, y)$ točka u ravnini koja odgovara broju $z = x + iy$, pri čemu je $z \neq 0$. Njen položaj možemo odrediti i pomoću sljedeća dva podatka:

1. udaljenosti r točke T od ishodišta O (r je modul kompleksnog broja z),
2. kuta φ između spojnice OT i pozitivnog dijela x-osi (φ je argument kompleksnog broja z unutar intervala $[0, 2\pi)$, oznaka $\varphi = arg(z)$).

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja:

$$x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Veza između algebarskog i trigonometrijskog oblika

Veza između algebarskog i trigonometrijskog oblika kompleksnog broja:

- Ako su zadani r i φ, onda je

$$x = Re\, z = r\cos\varphi, \quad y = Im\, z = r\sin\varphi.$$

- Ako su zadani x i y, onda je

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctan}\frac{y}{x}, \text{ za } x \neq 0,$$

  pri čemu kvadrant u kojem se nalazi φ treba odrediti sa slike odnosno iz predznaka od x i y (to jest, na osnovi informacije o kvadrantu u kojem se nalazi broj z).

Množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva

Neka su $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ i $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ kompleksni brojevi prikazani u trigonometrijskom obliku. Tada vrijedi:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot \frac{1}{r_2}(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)) \\ &= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)],\ z_2 \neq 0.\end{aligned}$$

Kompleksne brojeve zapisane u trigonometrijskom obliku množimo tako da im pomnožimo module, a argumente zbrojimo, dok ih dijelimo tako da im podijelimo module, a argumente oduzmemo.

Potenciranje i korjenovanje kompleksnih brojeva

Iz prethodnih formula slijedi $z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$.
Indukcijom zaključujemo da vrijedi općenito:

de Moivreova formula

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi),\ n \in \mathbb{N}.$$

$n-$ti korijen kompleksnog broja z:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, \ldots, n-1.$$

OPREZ!
postoji točno n različitih vrijednosti $n-$tog korijena.

Zadaci

Zadatak

Odredite $Re\, z$ i $Im\, z$ ako je

(a) $z = \frac{1+2i}{3-4i}$

(b) $z = \frac{1+i}{2+i} + \frac{i-1}{i-2}$

(c) $z = \frac{(2-3i)(1+\sqrt{3}i)}{(2+3i)(1-\sqrt{3}i)}$

Zadatak

Izračunajte: $1 + i + i^2 + \cdots + i^{99} + i^{100}$.

Zadatak

Izračunajte vrijednost izraza za zadane vrijednosti kompleksnih brojeva: $z_2^2 + z_1$, ako je $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 1 - 3i$.

Zadaci

Zadatak

Odredite realna rješenja jednadžbe $3x + (2 - i)(x + y) = -4 + 7i$.

Zadatak

Odredite trigonometrijski oblik kompleksnih brojeva $z_1 = 1 - i$, $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ i $z_3 = 1 + \sqrt{3}i$, a zatim odredite trigonometrijski oblik kompleksnog broja $z = \frac{z_1 \cdot z_2}{z_3}$.

Zadatak

Zapišite u trigonometrijskom obliku broj $z = \frac{1+i}{1-\sqrt{3}i}$, a zatim izračunajte z^9 i $\sqrt[5]{z}$.

Zadaci

Zadatak

Odredite kompleksni broj:

$$z = \frac{(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^3}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{13}}.$$

Zadatak

U skupu $\mathbb{C}$ riješite jednadžbu $z^3 - 5\sqrt{3}i = 5$.

Zadatak

Odredite skup točaka određen uvjetom: $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \le 2\}$.

Zadatak

Zadani su skupovi A i B. Nacrtajte skupove A i B te $A \cap B$ ako su

(a) $z \in \mathbb{C}$

$$A = \{z \,:\, |z + 2i| \leq 2\},\ B = \{z \,:\, Im[(z-1)(i+2)] \leq 1\},$$

(b)

$$A = \{z \,:\, 1 < |z + 2 - i| \leq 3\},\ B = \{z \,:\, Re(1 - iz) \leq 0\},$$

(c)

$$A = \{z \,:\, \left|\frac{z-2}{z+1-i}\right| \geq 1\},\ B = \left\{z \,:\, Im\left(\frac{1}{z}\right) \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

Binomni koeficijenti

Umnožak prvih n prirodnih brojeva označavamo sa:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

(čitamo: n faktorijela)
Faktorijele su definirane rekurzivno s

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1) \text{ uz dogovor } 0! = 1$$

Binomni koeficijent označavamo izrazom $\binom{n}{k}$ i definiramo ga ovako:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ uz dogovor } \binom{n}{0} := 1$$

Svojstva binomnih koeficijenata

Vrijedi:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \; k = 0, 1, \ldots, n$$

Pascalov trokut:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & \vdots
\end{array}$$

Svojstva Pascalovog trokuta

Princip ispisivanja sljedećih redaka:
svaki element (osim rubnih elemenata koji su 1) jednak je zbroju elemenata u prethodnom retku, lijevo i desno od njega te vrijedi:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Prema tome, sljedeći red u Pascalovom trokutu je:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\color{red}{1} & \color{red}{7} & & \color{red}{21} & & \color{red}{35} & & \color{red}{35} & & \color{red}{21} & & \color{red}{7} & \color{red}{1} \\
\vdots & & & & & & & & & & & & \vdots
\end{array}$$

Binomni poučak

Teorem

Za svaki $a, b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n,$$

što kraće zapisujemo

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Binomna formula za $n = 1$, $n = 2$ i $n = 3$

Za malene vrijednosti broja n dobijemo već poznate formule:

$$\begin{aligned} (a+b)^1 &= a+b, \\ (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2, \text{ kvadrat binoma} \\ (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \text{ kub binoma} \end{aligned}$$

Svojstva binomne formule:

1. U prikazu $(a+b)^n$ pomoću binomne formule postoji $n+1$ pribrojnik.
2. Eksponenti uz član a opadaju od n do 0, dok uz b rastu od 0 do n, tako da je u svakom članu njihov zbroj jednak n.
3. Binomni koeficijenti su u formuli simetrični.
4. Binomni koeficijenti su najprije rastući, a zatim padajući brojevi.

Primjeri razvoja po binomnoj formuli

Primjer

$$(x+1)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4 + \binom{5}{2}x^3 + \binom{5}{3}x^2 + \binom{5}{4}x + \binom{5}{5}$$
$$= x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1.$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3\left(-\frac{1}{x}\right) + \binom{4}{2}x^2\left(-\frac{1}{x}\right)^2$$
$$+ \binom{4}{3}x\left(-\frac{1}{x}\right)^3 + \binom{4}{4}\left(-\frac{1}{x}\right)^4$$
$$= x^4 - 4x^2 + 6 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4}.$$

Zadaci

Zadatak

Izračunajte pomoću binomne formule:

(a) $(x-1)^4$

(b) $(2x+1)^5$

(c) $(1+y^2)^4$

(d) $(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})^6$

(e) $(3-2i)^5$.

Zadatak

Odredite četvrti član u razvoju binoma $(\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x})^{10}$.

Zadatak

Odredite onaj član razvoja $(x+\frac{1}{x^2})^{12}$ koji ne sadrži x.