Zadaci za vježbu - derivacije i integrali

21. prosinca 2009.

(1) Odredite po definiciji derivacije $f'\left(\frac{1}{3}\right)$ ako je $f(x) = \dfrac{1}{3x+1}$.

(2) Derivirajte slijedeće funkcije:

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$,

(b) $f(x) = \sqrt{x^2+x-2}$,

(c) $f(x) = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$

(3) Izračunajte derivaciju implicitno zadane funkcije $y = f(x)$:

(a) $xy + x^2y^2 = 4$

(b) $x^3 + xy + y^3 - 7 = 0$

(c) $xe^y + ye^x = 11$

(4) Napišite jednadžbu tangente krivulje $x^2 + 4y = 1$ koja je paralelna pravcu $x + 2y - 5 = 0$, te nacrtajte sliku.

(5) Odredite domenu, nul-točke, ekstreme i točke infleksije, te nacrtajte graf funkcije

(a) $f(x) = \dfrac{3x - x^2}{x-4}$,

(b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$.

(6) Dokažite da je funkcija F primitivna funkcija za funkciju f na danom intervalu, ako je:

(a) $F(x) = \sqrt{x}\sin x$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cos x$, $x \in (0, \infty)$,

(b) $F(x) = x\sqrt{\ln x}$, $f(x) = \dfrac{1 + 2\ln x}{2\sqrt{\ln x}}$, $x \in (1, \infty)$.

(7) Izračunajte integrale:

(a) $\int \dfrac{e^{3x}-2}{e^x} dx$,

(b) $\int \dfrac{(x^2+1)^2}{x^3} dx$.

(8) Izračunajte integrale:

(a) $\int\limits_0^1 \arccos x dx$,

(b) $\int e^x \cos x dx$,

(c) $\int x^3 e^{-x} dx$,

(d) $\int (5x-3) \ln x dx$,

(e) $\int \frac{x^3+x+2}{x^2+7x+12} dx$,

(f) $\int \frac{1}{x^2-4x+7} dx$,

(g) $\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5} dx$,

(h) $\int \cos 3x \sin 5x dx$,

(i) $\int \cos x \sin^5 x dx$,

(j) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}$.

(9) (a) Odredite površinu lika koji određuje graf funkcije $f(x) = x^2 - 2x$, $x-$os i pravac $x = 3$.

(b) Odredite površinu lika koji zatvaraju pravac $y = 2 - x$ i parabola $y = x^2 - 4$.

(10) (a) Izračunajte volumen rotacionog tijela koji nastaje rotacijom oko osi x onog dijela krivulje $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ koji se nalazi između sjecišta krivulje s osi x.

(b) Odredite volumen rotacionog tijela koje nastaje rotacijom dijela krivulje $y = \sqrt{x}$ od ishodišta do pravca $x = 1$ oko osi x, te nacrtajte sliku.