

ZADACI ZA VJEŽBU

Uvod

1. Izračunaj: $A + 2B - C$ za $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 0 & -5 & 1 \\ -3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.

2. Zadane su matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Izračunaj: a) $2A + B^T$

b) $A^T - 2B$

3. Izračunaj:

a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

4. Uvjeri se neposrednim množenjem da vrijedi $(ABC)^T = C^T B^T A^T$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Odredi $f(A)$ ako je $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, a $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$.

6. Provjeri da za matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ i polinom $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 4$ vrijedi

$$f(A) = 0.$$

Determinante matrice

1. Pokažite da matrica $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, zadovoljava jednačbu:

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = 0, \text{ gdje je } I \text{ jedinična matrica.}$$

2. Zadane su matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Odredite matricu X za koju vrijedi a) $2A + 3X = I$
b) $3A - 2X = B$.

3. Riješite matrice jednačbe:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -\frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 16 & 7 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \\ -8 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 10 & 0 \\ -8 & -19 & 3 \end{bmatrix}$.

4. Izračunajte $\det(A)$ ako je

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$.

5. Izračunajte determinante:

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}$,

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$,

c) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Determinante i rang matrice

1. Izračunaj determinante:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & 8 \\ 1 & 7 & -5 \end{vmatrix}, \quad \text{b) } \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}, \quad \text{c) } \begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}.$$

2. Ako je $D = \begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$

- a) izračunajte $M_{34}, M_{25}, A_{34}, A_{25}$
b) izračunajte D .

3. Odredite rang matrica:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{c) } C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

4. U ovisnosti o $\lambda \in \mathbb{R}$ odredite $r(A)$ za $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

5. Dokažite da su matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 13 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ regularne i odredite njihov rang.}$$

6. Dokažite da su matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -10 & -6 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 11 & 15 & 3 \\ -6 & -21 & -3 \end{bmatrix} \text{ singularne i odredite njihov rang.}$$

Inverzna matrica i matrice jednačbe

1. Odredite inverznu matricu matrice A ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Dokažite da je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ regularna i odredite A^{-1} .

3. Odredite inverzne matrice sljedećih matrica:

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$, b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$,

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & i & 1 & i \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 1 & i & i & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, gdje je i imaginarna jedinica.

4. Odredite vrijednost parametra k za koji postoji A^{-1} ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ k & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ te odredite } A^{-1} \text{ za } k = 0.$$

5. Riješite matrice jednačbe:

a) $AX = B$, ako je $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$,

b) $AX = B$, ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

c) $3AX + 2C = B + I$, ako je $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 13 \\ 1 & 83 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 11 & -4 \\ 5 & -24 \end{bmatrix}$

d) $AX + B = C$, ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 15 & 17 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -6 \\ -3 & -11 \end{bmatrix}$.

6. Riješite matrice jednačbe:

a) $AX = 4X + \frac{1}{2}B + C$, ako je $A = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 16 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1.5 \end{bmatrix}$,

b) $XB = 3A^* - 2X$, ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Sustavi linearnih jednažbi

1. Riješite sustave:

$$\begin{array}{llll} x + y + z = 4 & 3x + 2y + z = -1 & 3x - y + 2z = 0 & 2x - y + 3z = 0 \\ \text{a) } x + 2y + 3z = 5 & \text{b) } 7x + 6y + 5z = 2 & \text{c) } 2x + 3y - 5z = 0 & \text{d) } x + 2y - 5z = 0 \\ 5x + 3y + 5z = 14 & 5x + 4y + 3z = 2 & x + y + z = 0 & 3x + y - 2z = 0 \\ \\ 2x - 3y + z = 2 & x + 2y + 3z = 4 & x + y + 3z = 3 & -x + 2y + 3z = 3 \\ \text{e) } x + 5y - 4z = -5 & \text{f) } 2x + 4y + 6z = 3 & \text{g) } -2x + 2y + z = -2 & -2x + z = -2 \\ 4x + 4y - 4z = 4 & 3x + y - z = 1 & x + 4y - z = 3 & \text{h) } -x + 2y - z = 3 \\ & & -2x + 5z = -2 & -2x + 2y + 12z = 2 \end{array}$$

2. Riješite sustave:

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ \text{a) } 3x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 0 \\ \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ \text{b) } 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 6 \\ \\ \text{c) } 9x_1 + 21x_2 - 15x_3 + 5x_4 = 0 \\ 12x_1 + 28x_2 - 20x_3 + 7x_4 = 0 \end{array}$$

3. U ovisnosti o parametru $\lambda \in R$ riješite slijedeći sustav jednažbi:

$$\begin{array}{l} x + y + \lambda z = 2 \\ 3x + 4y + 2z = \lambda \\ 2x + 3y + z = 1 \end{array}$$

4. Odredite $\lambda \in R$ tako da sustav

$$\begin{aligned}x + 3z &= -3 \\2x + \lambda y + z &= -2 \\x + 2y - \lambda z &= 1\end{aligned}$$

- a) ima jedinstveno rješenje,
- b) nema rješenja,
- c) ima beskonačno rješenja.

5. Riješite sustav

$$\begin{aligned}x - 2y + z &= 1 \\2x - y + z &= 2 \\3x - 3y + 2z &= 3\end{aligned}$$

6. U ovisnosti o parametru $a \in R$ riješite sustav

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= a \\3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4\end{aligned}$$

7. Riješite sustav

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\2x_1 - x_2 - 3x_4 &= 0 \\3x_1 - x_3 + x_4 &= 0 \\2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 0\end{aligned}$$

8. U ovisnosti o parametru $m \in R$ riješite sustav

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= 0 \\x + y + z &= 0 \\mx + y + z &= 0\end{aligned}$$

ZADACI ZA VJEŽBU (Linearna algebra)

1. a) Izračunajte $f(A)$ ako je $f(x) = -2x^2 + 9x - 1$, a $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

b) Odredite matricu X za koju vrijedi $2A^T - 5I = 3X$, ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

2. a) Izračunajte determinantu $\begin{vmatrix} 1 & 1 & z \\ 1 & z & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ako je $z = \frac{1+i}{1-i}$.

b) Izračunajte rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

3. a) Odredite parametar λ tako da rang matrice $A = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda & \lambda+1 \\ \lambda & \lambda & \lambda-1 \\ \lambda+1 & \lambda & 2\lambda+3 \end{bmatrix}$ bude 2.

b) Riješite matricnu jednadžbu: $XA - 2B = C$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. a) Riješite sustav

$$\begin{cases} 5x + 5y + 8z = 4 \\ 2x - y - z = 1 \\ 3x + y + 2z = 2 \\ \underline{x + 2y + 3z = 1} \end{cases}$$

b) Odredite vrijednost parametra a , tako da sustav

$$\begin{cases} 3x - y + 5z = 0 \\ 2x + (a-1)y - 3z = 0 \\ x - 2y + (a+6)z = 0 \end{cases}$$

ima netrivialnih rješenja te za tako dobivene vrijednosti riješite sustav.