II. ANALITIČKA GEOMETRIJA PROSTORA

II. DIO (Pravac)

dr. sc. Mirna Rodić Lipanović – 2009./2010.

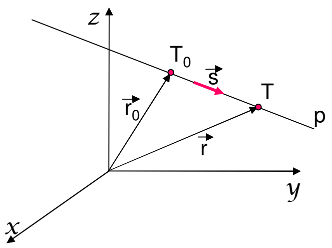
Pravac u prostoru

Jednadžba pravca

Neka je: **$T_0\ (x_0, y_0, z_0)$ zadana točka prostora**

$\vec{s} = \{a, b, c\}$ zadani vektor smjera

Zadanom točkom prostora prolazi samo 1 pravac paralelan sa zadanim vektorom $\vec{s}$.



$T\ (x,y,z)$ - proizvoljna točka pravca p

$\overrightarrow{T_0T} = t \cdot \vec{s}$, $t \in \mathbf{R}$ (parametar)

$\vec{r} - \vec{r}_0 = t \cdot \vec{s}$

$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{s}}$ **Jednadžba pravca** (vektorski oblik)

koordinatno: $\Longrightarrow$ $\boxed{\begin{cases} x = x_0 + t \cdot a \\ y = y_0 + t \cdot b \\ z = z_0 + t \cdot c \end{cases}}$ **PARAMETARSKI OBLIK JEDNADŽBE PRAVCA**

eliminacijom parametra: $\Longrightarrow$ $\boxed{\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}}$ **KANONSKI OBLIK JEDNADŽBE PRAVCA**

- **Jednadžba pravca kroz dvije točke**

$T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_2, y_2, z_2)$

$\Longrightarrow$ $\overrightarrow{T_1T_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ vektor smjera

$\Longrightarrow$ Jednadžba pravca kroz dvije točke: $\boxed{\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$

- **Pravac kao presječnica dviju ravnina** (koje nisu paralelne)

$$p \ldots \begin{cases} \Pi_1 \ldots A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ \Pi_2 \ldots A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $\vec{s} \perp \vec{n}_1, \vec{n}_2$, pa je smjer tog pravca određen vektorom $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$

Točka pravca odredi se tako da se po volji zada jedna koordinata, a ostale se izračunaju iz sustava (Π_1) i (Π_2).

Kut između dva pravca

$p_1 \ldots \dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{y - y_1}{b_1} = \dfrac{z - z_1}{c_1}$ $\Longrightarrow$ $\vec{s}_1 = \{a_1, b_1, c_1\}$

$p_2 \ldots \dfrac{x - x_2}{a_2} = \dfrac{y - y_2}{b_2} = \dfrac{z - z_2}{c_2}$ $\Longrightarrow$ $\vec{s}_2 = \{a_2, b_2, c_2\}$

Pod kutem između dva pravca podrazumijeva se kut između njihovih vektora smjera. $\Longrightarrow$ $\cos\varphi = \dfrac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|}$

Da bi dobili kut φ, $0 \le \varphi \le 90°$, uzimamo apsolutnu vrijednost:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

- **uvjet paralelnosti dva pravca**

$p_1 \parallel p_2$ tj. $\varphi = \sphericalangle(p_1, p_2) = 0$ $\Leftrightarrow$ vektori smjera su paralelni, odn. kolinearni

$\vec{s}_1 = \lambda \cdot \vec{s}_2$ tj. $\boxed{\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}} = \lambda$ $(\lambda \neq 0)$

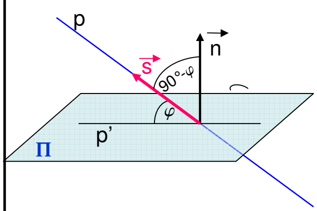
- **uvjet okomitosti dva pravca**

$p_1 \perp p_2$ tj. $\varphi = \sphericalangle(p_1, p_2) = 90°$ $\Leftrightarrow$ vektori smjera su okomiti

$\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$ tj. $\boxed{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0}$

Međusobni položaj pravca i ravnine (Kut između pravca i ravnine)

Pravac je ili paralelan s ravninom ili je probada pod nekim kutem različitim od 0.



$\Pi \ \ldots \ Ax + By + Cz + D = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{n} = \{A, B, C\}$ vektor normale ravnine

$p \ \ldots \ \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c} \quad \Longrightarrow \quad \vec{s} = \{a, b, c\}$ vektor smjera pravca

$\varphi = \sphericalangle(p, \Pi) = \sphericalangle(p, p')$

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \sin\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{s}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|} = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- **uvjet paralelnosti pravca i ravnine**

$$p \parallel \Pi \iff \vec{s} \perp \vec{n} \iff \vec{n}\cdot\vec{s} = 0 \iff \boxed{Aa + Bb + Cc = 0}$$

- **uvjet okomitosti pravca i ravnine**

$$p \perp \Pi \iff \vec{n} \parallel \vec{s} \iff \vec{n} = \lambda\cdot\vec{s} \iff \boxed{\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}} = \lambda$$

Primjer: Kada pravac **p** leži u ravnini Π ?

Kada je $p \parallel \Pi$ (tj. $Aa + Bb + Cc = 0$), te $T_1 \in p \Longrightarrow T_1 \in \Pi$.

5

Probodište pravca i ravnine

Ako pravac i ravnina nisu paralelni, onda se sijeku, tj. postoji probodište ravnine pravcem.

1) Neka je pravac zadan kao presječnica dviju ravnina:

$$p \ \ldots \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

a ravnina jednadžbom:

$$\Pi \ \ldots \ Ax + By + Cz + D = 0 \ .$$

Probodište **P(x,y,z)** pravca **p** i ravnine Π leži u sve tri ravnine, dakle, njegove koordinate zadovoljavaju sve tri jednadžbe.

$\Longrightarrow$ Koordinate točke **P** su rješenja sustava:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

Ako je taj sustav:

neodređen $\Longrightarrow$ pravac p leži u Π

nemoguć $\Longrightarrow$ $p \parallel \Pi$

ima jedinstveno rješenje $\Longrightarrow$ to su koordinate probodišta $P = p \cap \Pi$.

Primjer: zadatak 8.a)

6

Probodište pravca i ravnine (nastavak)

2) Neka je: $p \; \ldots \; \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$

$\Pi \; \ldots \; \mathbf{A\,x+B\,y+C\,z+D=0} \qquad (*)$

Parametarska jednadžba pravca p je:
$$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot t \\ y = y_0 + b \cdot t \\ z = z_0 + c \cdot t \end{cases}$$

Tražimo onu vrijednost parametra t koja pripada probodištu P. (ozn. t_P)

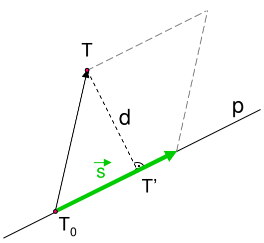
Dakle,
$$\begin{cases} x_P = x_0 + a \cdot t_P \\ y_P = y_0 + b \cdot t_P \\ z_P = z_0 + c \cdot t_P \end{cases}$$
gdje je $P(x_P, y_P, z_P)$

Kako je $P \in \Pi \implies$ koordinate točke P zadovoljavaju jednadžbu $(*)$

Odavde odredimo t_P, a zatim izračunamo x_P, y_P, z_P.

Primjer: zadatak 8.b)

Udaljenost točke od pravca



Neka je zadano:

pravac $p \; \ldots \; \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$

(prolazi kroz točku $T_0(x_0,y_0,z_0)$ i ima vektor smjera $\vec{s}=\{a,b,c\}$)

i točka $T(x,y,z) \notin p$.

Znamo: $d = d(T, p) = d(T, T')$

Promotrimo paralelogram razapet vektorima $\vec{s}$ i $\overrightarrow{T_0T}$:

$P_{\square} = |\vec{s}| \cdot d = |\overrightarrow{T_0T} \times \vec{s}|$

$$\implies \quad d = \frac{1}{|\vec{s}|} \cdot \left|\overrightarrow{T_0T} \times \vec{s}\right| \qquad \text{tj.} \qquad d = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \cdot \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \end{vmatrix} \right|$$

Primjer: zadatak 9.d)

Međusobni položaj dvaju pravaca

Dva pravca mogu biti
- paralelni (vektori smjera su kolinearni)
- sijeku se
- mimoilazni

Ako se 2 pravca sijeku, onda postoji ravnina

$$\Pi \;...\; Ax + By + Cz + D = 0$$

u kojoj leže oba pravca.

9

Sjecište dvaju pravaca

1) Neka je: $p_1 \;\cdots\; \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$, $p_2 \;\cdots\; \frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$

Vrijedi:

$$\left.\begin{array}{lll} T_1 \in \Pi & \text{tj.} & A x_1 + B y_1 + C z_1 + D = 0 \\ T_2 \in \Pi & \text{tj.} & A x_2 + B y_2 + C z_2 + D = 0 \\ p_1 \parallel \Pi & \text{tj.} & A a_1 + B b_1 + C c_1 = 0 \\ p_2 \parallel \Pi & \text{tj.} & A a_2 + B b_2 + C c_2 = 0 \end{array}\right\}$$

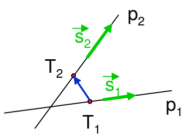
Homogen sustav
(nepoznanice A,B,C,D)

On ima netrivijalno rješenje, ako je determinanta sustava jednaka 0.

$$\Longrightarrow \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

uvjet presijecanja pravaca

Alternativno:



$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

uvjet presijecanja pravaca

(vektori $\overrightarrow{T_1T_2}$, $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ su komplanarni)

Ako se pravci sijeku, koordinate sjecišta (najlakše) dobijemo iz parametarskih jednadžbi pravca.

10

Sjecište dvaju pravaca (nastavak)

2) Neka su pravci zadani kao presječnice dviju ravnina :

$$p_1 \ldots \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$p_2 \ldots \begin{cases} A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0 \\ A_4 x + B_4 y + C_4 z + D_4 = 0 \end{cases}$$

Homogen sustav
(nepoznanice su x, y, z, t=1)

On ima netrivijalno rješenje, ako je determinanta sustava jednaka 0.

$$\Longrightarrow \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0$$

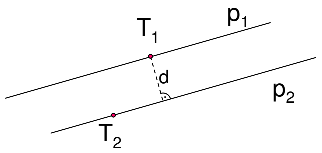
uvjet presijecanja pravaca

Ako se pravci sijeku, koordinate sjecišta dobijemo tako da se od gornje 4 jednadžbe ravnine odaberu 3 međusobno nezavisne jednadžbe i riješi dobiveni sustav.

Udaljenost pravaca u prostoru

1) Ako se pravci sijeku $\Longrightarrow$ udaljenost im je 0

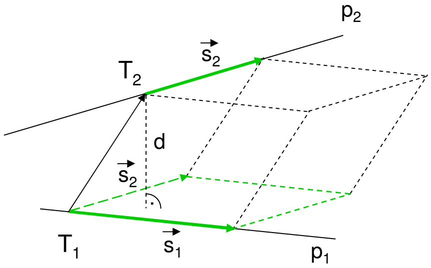
2) Ako su pravci paralelni $\Longrightarrow$ udaljenost možemo izračunati pomoću formule za udaljenost točke od pravca (odaberemo 1 točku jednog pravca i računamo njenu udaljenost od drugog pravca)



3) Ako se pravci niti sijeku niti su paralelni, kažemo da su mimoilazni (ili mimosmjerni).

Najkraća udaljenost mimoilaznih pravaca

Neka je: $p_1 \ldots \dfrac{x-x_1}{a_1}=\dfrac{y-y_1}{b_1}=\dfrac{z-z_1}{c_1}$, $p_2 \ldots \dfrac{x-x_2}{a_2}=\dfrac{y-y_2}{b_2}=\dfrac{z-z_2}{c_2}$



Promatramo vektore $\overrightarrow{T_1T_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2$.

Ako su oni komplanarni, onda pravci p_1 i p_2 leže u istoj ravnini (ili su paralelni ili se sijeku).

Pretpostavimo da nisu komplanarni. (Dakle, p_1 i p_2 su mimoilazni pravci)

$\Longrightarrow$ Tada je volumen paralelepipeda kojeg oni razapinju različit od 0.

$$\mathbf{V}_{\text{paralelepipeda}} = |(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2)\cdot \overrightarrow{T_1T_2}| = |(\overrightarrow{T_1T_2} \times \vec{s}_1)\cdot \vec{s}_2|$$

$$\mathbf{V}_{\text{paralelepipeda}} = \text{Baza} \cdot \text{visina} = |\vec{s}_1 \times \vec{s}_2| \cdot d$$

$$\Longrightarrow \quad d=\frac{V}{|\vec{s}_1\times\vec{s}_2|}=\frac{\left|\left(\overrightarrow{T_1T_2}\times\vec{s}_1\right)\cdot\vec{s}_2\right|}{|\vec{s}_1\times\vec{s}_2|}=\frac{\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}\right|}{\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}\right|}$$

13