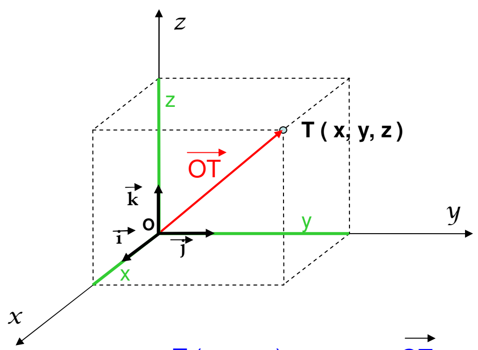
II. ANALITIČKA GEOMETRIJA PROSTORA

I. DIO (Točka. Ravnina.)

dr. sc. Mirna Rodić Lipanović – 2009./2010.

Točka u prostoru

- $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ Kartezijev pravokutni koordinatni sustav



Položaj točke u prostoru je jednoznačno određen njenim koordinatama.

$$T(x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OT} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = \{x, y, z\}$$

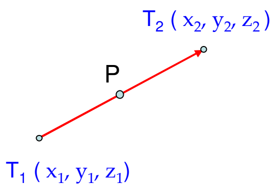
- dvije točke: $T_1\,(x_1, y_1, z_1)$, $T_2\,(x_2, y_2, z_2)$

Udaljenost točaka T_1 i T_2 (To je zapravo duljina dužine $\overline{T_1T_2}$, odn. duljina vektora $\overrightarrow{T_1T_2}$.)

$$\overrightarrow{T_1T_2} = \{ x_2 - x_1 , y_2 - y_1 , z_2 - z_1 \}$$

$$d\,(T_1,T_2) = |\overrightarrow{T_1T_2}\,| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

- **polovište dužine** $\overline{T_1T_2}$



Do koordinata polovišta dolazimo preko vektorske jednakosti:

$$\overrightarrow{T_1P} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{T_1T_2}$$

$$\{ x_P - x_1 , y_P - y_1 , z_P - z_1 \} = \{ \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1) , \tfrac{1}{2}(y_2 - y_1) , \tfrac{1}{2}(z_2 - z_1) \}$$

$$\Longrightarrow \quad x_P = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad y_P = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad , \quad z_P = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad P\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2} \right)$$

3

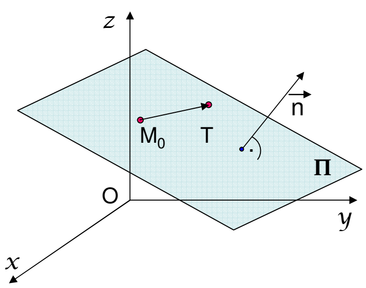
Ravnina u prostoru

Analitički je najjednostavnije ravninu opisati pomoću jedne točke i jednog vektora koji je okomit na tu ravninu (tzv. normala ravnine).

Neka je: **$M_0\,(x_0,y_0,z_0)$ zadana točka prostora**

$\vec{n} = A\,\vec{i} + B\,\vec{j} + C\,\vec{k}$ ($\neq \vec{0}$) vektor normale ($\vec{n} = \{ A, B, C \}$)

Zadanom točkom prostora prolazi samo 1 ravnina koja je okomita na zadanu normalu.



Π - ravnina

T (x,y,z) - proizvoljna točka ravnine Π

$\overrightarrow{M_0T} = \{ x - x_0 , y - y_0 , z - z_0 \}$ vektor koji leži u Π

Vrijedi: $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0T}$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0T} = 0}$$

Jednadžba ravnine (u vektorskom obliku)

$$\Longrightarrow \quad \boxed{A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0}$$

Jednadžba ravnine (u algebarskom obliku)

Jednadžba ravnine se može zapisati i kao :

$$\boxed{A\,x + B\,y + C\,z + D = 0} \quad , \quad \text{gdje je} \quad D = -\,(A\,x_0 + B\,y_0 + C\,z_0)\,.$$

OPĆI OBLIK JEDNADŽBE RAVNINE

4

Ravnina u prostoru (nastavak)

- Jednadžba ravnine Π :

  $(*)$ $\quad \mathbf{A\,x + B\,y + C\,z + D = 0}$

  Pomnožimo li gornju jednadžbu nekim brojem $\lambda \neq 0$, dobijemo jednadžbu:

  $(**)$ $\quad \mathbf{A_1\,x + B_1\,y + C_1\,z + D_1 = 0}$

  koja predstavlja istu ravninu Π u prostoru.

$\Longrightarrow$ Dvije jednadžbe $(*)$ i $(**)$ su **jednadžbe iste ravnine** u prostoru, ako je

$$\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = \frac{C_1}{C} = \frac{D_1}{D} \quad (=\lambda)\,, \qquad \text{za } A, B, C, D \neq 0.$$

Ako je neki od nazivnika jednak 0, onda je i brojnik tog razlomka jednak 0.

Ravnina u prostoru (nastavak)

- Promotrimo opći oblik jednadžbe ravnine Π :

  $\mathbf{A\,x + B\,y + C\,z + D = 0}$

  - Ako je D=0 , onda ravnina prolazi ishodištem O(0,0,0).
  - Ako je D≠0 , onda jednadžbu ravnine možemo podijeliti s -D , pa imamo:

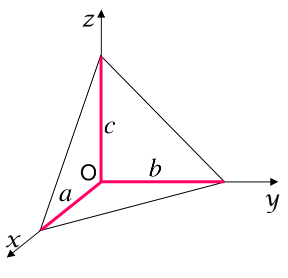
  $A\,x + B\,y + C\,z = -D \quad / : (-D)$

  $$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z = 1$$

  tj. $\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$ **SEGMENTNI OBLIK JEDNADŽBE RAVNINE**

  gdje su: $a = -\frac{D}{A}\,, \quad b = -\frac{D}{B}\,, \quad c = -\frac{D}{C}$

  duljine segmenata na koordinatnim osima.



Osobiti slučajevi jednadžbe ravnine: $A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$

D=0	$\Longrightarrow$	$A\,x + B\,y + C\,z = 0$	ravnina kroz ishodište
A=0	$\Longrightarrow$	$B\,y + C\,z + D = 0$	ravnina paralelna s osi x
B=0	$\Longrightarrow$	$A\,x + C\,z + D = 0$	ravnina paralelna s osi y
C=0	$\Longrightarrow$	$A\,x + B\,y + D = 0$	ravnina paralelna s osi z
A=D=0	$\Longrightarrow$	$B\,y + C\,z = 0$	ravnina kroz ishodište i paralelna s osi x, tj. sadrži os x
B=D=0	$\Longrightarrow$	$A\,x + C\,z = 0$	ravnina kroz ishodište i paralelna s osi y, tj. sadrži os y
C=D=0	$\Longrightarrow$	$A\,x + B\,y = 0$	ravnina kroz ishodište i paralelna s osi z, tj. sadrži os z
A=B=0	$\Longrightarrow$	$C\,z + D = 0$	ravnina paralelna s osi x i y, tj. paralelna s xy ravninom
A=C=0	$\Longrightarrow$	$B\,y + D = 0$	ravnina paralelna s osi x i z, tj. paralelna s xz ravninom
B=C=0	$\Longrightarrow$	$A\,x + D = 0$	ravnina paralelna s osi y i z, tj. paralelna s yz ravninom
A=B=D=0	$\Longrightarrow$	$z = 0$	xy ravnina
A=C=D=0	$\Longrightarrow$	$y = 0$	xz ravnina
B=C=D=0	$\Longrightarrow$	$x = 0$	yz ravnina

Određivanje jednadžbe ravnine koja prolazi kroz tri zadane točke

Neka su zadane tri točke T_1, T_2, T_3 (nekolinearne, tj. ne leže na istom pravcu).
Te tri točke određuju jednu ravninu, označimo je sa Π.
Neka je **T (x,y,z)** proizvoljna točka ravnine Π.

1. način

$\Longrightarrow$ vektori $\overrightarrow{T_1T}$, $\overrightarrow{T_1T_2}$ i $\overrightarrow{T_1T_3}$ leže u istoj ravnini, tj. **komplanarni su**.

$\Longrightarrow$ njihov mješoviti produkt iznosi 0.

tj. $\quad (\overrightarrow{T_1T} \times \overrightarrow{T_1T_2}) \cdot \overrightarrow{T_1T_3} = 0$

odnosno, koordinatno:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Određivanje jednadžbe ravnine koja prolazi kroz tri zadane točke

T_1, T_2, T_3 - zadane nekolinearne točke

$T\,(x,y,z)$ proizvoljna točka ravnine Π

2. način

Opća jednadžba ravnine Π glasi: $Ax + By + Cz + D = 0$

i nju zadovoljavaju sve točke ravnine Π, pa tako i : $T,\ T_1,\ T_2,\ T_3$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0 \end{cases}$$

Homogen sustav

Ako je njegova determinanta jednaka 0, onda on ima netrivijalna rješenja.

(tj. postoje takvi A, B, C, D za koje sustav vrijedi, a da nisu svi istovremeno jednaki 0)

Dakle:
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(Množenjem 2.retka s -1, te dodavanjem 1. 3. i 4. retku, a zatim razvojem determinante po 4.stupcu, dobivamo istu determinantu kao u 1. načinu.)

Kut između dviju ravnina

$\Pi_1 \;...\; A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$\Pi_2 \;...\; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Kut φ između ravnina Π_1 i Π_2 se definira kao kut što ga međusobno zatvaraju vektori normala $\vec{n}_1 = \{A_1,B_1,C_1\}$ i $\vec{n}_2 = \{A_2,B_2,C_2\}$. (uzima se manji od dva suplementna kuta)

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (\,0 \le \varphi \le 90°\,)$$

- **paralelne ravnine**

$\varphi = \sphericalangle(\Pi_1, \Pi_2) = 0 \quad \Longrightarrow$ vektori normala su paralelni, odn. kolinearni

$\vec{n}_1 = \lambda\, \vec{n}_2$ tj. $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \lambda \qquad (\lambda \neq 0)$

- **okomite ravnine**

$\varphi = \sphericalangle(\Pi_1, \Pi_2) = 90° \quad \Longrightarrow$ vektori normala su okomiti

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ tj. $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

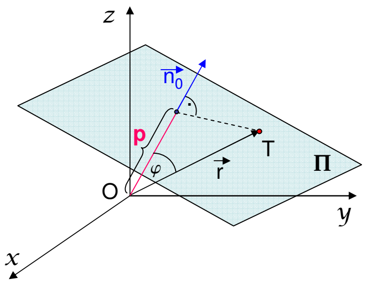
Normalni oblik jednadžbe ravnine

Π . . . $Ax + By + Cz + D = 0$ jednadžba ravnine (opći oblik)

$\Longrightarrow$ Vektor normale: $\vec{n} = \{A, B, C\}$

Jedinični vektor u smjeru vektora normale: $\vec{n}_0 = \dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \dfrac{\{A,B,C\}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$

$(|\vec{n}_0| = 1)$



Označimo: $p = d(O, \Pi)$

Neka je:

T (x,y,z) - proizvoljna točka ravnine Π

$\vec{r} = \overrightarrow{OT}$ - radij-vektor točke T

Projekcija vektora $\vec{r}$ na $\vec{n}_0$ je p.

$$p = proj_{\vec{n}_0}\vec{r} = |\vec{r}| \cdot \cos\varphi = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}_0}{|\vec{n}_0|} = \vec{r} \cdot \vec{n}_0 =$$
$$= x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma$$

$$\Longrightarrow \boxed{x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0}$$

NORMALNI OBLIK JEDNADŽBE RAVNINE

Veza između općeg i normalnog oblika jednadžbe ravnine:

normalni oblik: $x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0 \quad / \cdot\lambda \quad (\lambda \neq 0)$

$$x \cdot \lambda\cos\alpha + y \cdot \lambda\cos\beta + z \cdot \lambda\cos\gamma + (-\lambda p) = 0$$

$\Longrightarrow$ $Ax + By + Cz + D = 0$ opći oblik

$\Longrightarrow$ Ako opći oblik podijelimo s odgovarajućim brojem λ ($\lambda \neq 0$), onda dobijemo normalni oblik.

Broj λ odredimo iz jednakosti: $A^2 + B^2 + C^2 = \lambda^2 \underbrace{(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)}_{=1} = \lambda^2$

tj. $\lambda = \pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$

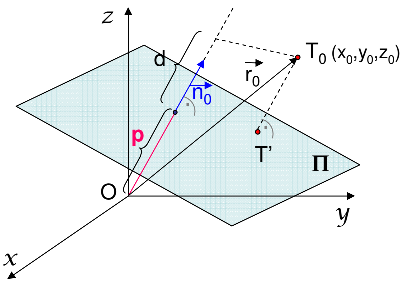
Predznak + ili – se bira prema predznaku od D, tako da udaljenost p bude pozitivna. ($D = -\lambda p$)

$\Longrightarrow$ $\lambda = -signD \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{Ax + By + Cz + D}{-signD \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0}$$

NORMALNI OBLIK JEDNADŽBE RAVNINE

Udaljenost točke od ravnine



Neka je $T_0\ (x_0,y_0,z_0)$ neka točka u prostoru.

$d\ (T_0, \Pi) = d\ (T_0, T')$ (T' je projekcija točke T_0 na Π)

Projekcija $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OT_0}$ na jedinični vektor $\vec{n}_0$ je:

$$proj_{\vec{n}_0}\vec{r}_0 = \begin{cases} p + d, & \text{ako su O i } T_0 \text{ s različitih strana ravnine } \Pi \\ p - d, & \text{ako su O i } T_0 \text{ s iste strane ravnine } \Pi \end{cases}$$

pri čemu je $d = d\ (T_0, \Pi)$

$$\Longrightarrow \quad d = proj_{\vec{n}_0}\vec{r}_0 - p = x_0 \cdot \cos\alpha + y_0 \cdot \cos\beta + z_0 \cdot \cos\gamma - p$$

odn. $$d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{-signD \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Dakle, udaljenost točke T_0 od ravnine se dobije tako da se u normalni oblik jednadžbe ravnine uvrste koordinate točke T_0.

Predznak ovako dobivene udaljenosti:

$d > 0$, ako su O i T_0 s različitih strana ravnine Π

$d < 0$, ako su O i T_0 s iste strane ravnine Π