

II. ANALITIČKA GEOMETRIJA PROSTORA

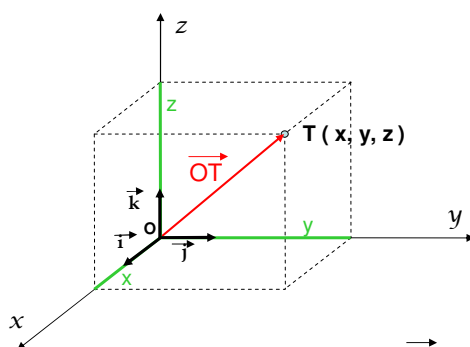
I. DIO (Točka. Ravnina.)

dr. sc. Mirna Rodić Lipanović – 2009./2010.

1

Točka u prostoru

- $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ Kartezijev pravokutni koordinatni sustav



Položaj točke u prostoru je jednoznačno određen njenim koordinatama.

$$T(x, y, z) \Leftrightarrow \vec{OT} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \{x, y, z\}$$

2

- dvije točke: $T_1 (x_1, y_1, z_1)$, $T_2 (x_2, y_2, z_2)$

Udaljenost točaka T_1 i T_2 (To je zapravo duljina dužine $\overline{T_1 T_2}$, odn. duljina vektora $\overrightarrow{T_1 T_2}$.)

$$\overrightarrow{T_1 T_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

$$d(T_1, T_2) = |\overrightarrow{T_1 T_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- **polovište dužine** $\overline{T_1 T_2}$

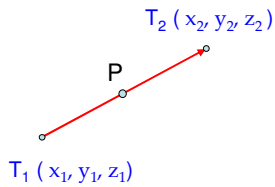
Do koordinata polovišta dolazimo preko vektorske jednakosti:

$$\overrightarrow{T_1 P} = \frac{1}{2} \overrightarrow{T_1 T_2}$$

$$\{x_P - x_1, y_P - y_1, z_P - z_1\} = \left\{ \frac{1}{2}(x_2 - x_1), \frac{1}{2}(y_2 - y_1), \frac{1}{2}(z_2 - z_1) \right\}$$

$$\Rightarrow x_P = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_P = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_P = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

$$\Rightarrow P \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$



3

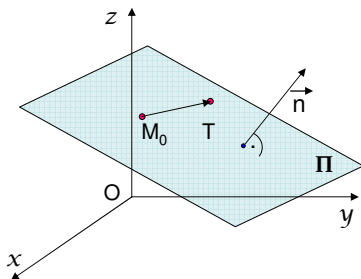
Ravnina u prostoru

Analički je najjednostavnije ravninu opisati pomoću jedne točke i jednog vektora koji je okomit na tu ravninu (tzv. normala ravnine).

Neka je: $M_0 (x_0, y_0, z_0)$ **zadana točka prostora**

$$\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} (\neq \vec{0}) \quad \text{vektor normale} \quad (\vec{n} = \{A, B, C\})$$

Zadanom točkom prostora prolazi samo 1 ravnina koja je okomita na zadanu normalu.



Π - ravnina

$T(x, y, z)$ - proizvoljna točka ravnine Π

$$\overrightarrow{M_0 T} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\} \quad \text{vektor koji leži u } \Pi$$

$$\text{Vrijedi: } \vec{n} \perp \overrightarrow{M_0 T}$$

$$\Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0 T} = 0 \quad \text{Jednadžba ravnine (u vektorskom obliku)}$$

$$\Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad \text{Jednadžba ravnine (u algebarskom obliku)}$$

Jednadžba ravnine se može zapisati i kao :

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad \text{gdje je } D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0).$$

OPĆI OBLIK JEDNADŽBE RAVNINE

4

Ravnina u prostoru (nastavak)

- Jednadžba ravnine Π :

$$(*) \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

Pomnožimo li gornju jednadžbu nekim brojem $\lambda \neq 0$, dobijemo jednadžbu:

$$(**) \quad A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

koja predstavlja istu ravninu Π u prostoru.

\Rightarrow Dvije jednadžbe (*) i (**) su **jednadžbe iste ravnine** u prostoru, ako je

$$\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = \frac{C_1}{C} = \frac{D_1}{D} \quad (= \lambda), \quad \text{za } A, B, C, D \neq 0.$$

Ako je neki od nazivnika jednak 0, onda je i brojnik tog razlomka jednak 0.

5

Ravnina u prostoru (nastavak)

- Promotrimo opći oblik jednadžbe ravnine Π :

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

- Ako je $D=0$, onda ravnina prolazi ishodištem $O(0,0,0)$.
- Ako je $D \neq 0$, onda jednadžbu ravnine možemo podijeliti s $-D$, pa imamo:

$$Ax + By + Cz = -D \quad /: (-D)$$

$$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z = 1$$

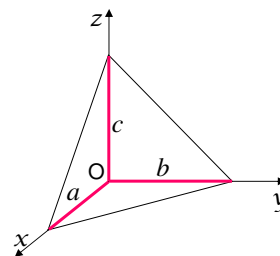
tj.

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

**SEGMENTNI OBLIK
JEDNADŽBE RAVNINE**

gdje su: $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$

duljine segmenata na koordinatnim osima.



6

Osobiti slučajevi jednadžbe ravnine: $Ax + By + Cz + D = 0$

$D=0$	$\implies Ax + By + Cz = 0$	ravnina kroz ishodište
$A=0$	$\implies By + Cz + D = 0$	ravnina paralelna s osi x
$B=0$	$\implies Ax + Cz + D = 0$	ravnina paralelna s osi y
$C=0$	$\implies Ax + By + D = 0$	ravnina paralelna s osi z
$A=D=0$	$\implies By + Cz = 0$	ravnina kroz ishodište i paralelna s osi x, tj. sadrži os x
$B=D=0$	$\implies Ax + Cz = 0$	ravnina kroz ishodište i paralelna s osi y, tj. sadrži os y
$C=D=0$	$\implies Ax + By = 0$	ravnina kroz ishodište i paralelna s osi z, tj. sadrži os z
$A=B=0$	$\implies Cz + D = 0$	ravnina paralelna s osi x i y, tj. paralelna s xy ravninom
$A=C=0$	$\implies By + D = 0$	ravnina paralelna s osi x i z, tj. paralelna s xz ravninom
$B=C=0$	$\implies Ax + D = 0$	ravnina paralelna s osi y i z, tj. paralelna s yz ravninom
$A=B=D=0$	$\implies z = 0$	xy ravnina
$A=C=D=0$	$\implies y = 0$	xz ravnina
$B=C=D=0$	$\implies x = 0$	yz ravnina

7

Određivanje jednadžbe ravnine koja prolazi kroz tri zadane točke

Neka su zadane tri točke T_1, T_2, T_3 (nekolinearne, tj. ne leže na istom pravcu).

Te tri točke određuju jednu ravninu, označimo je sa Π .

Neka je $T(x, y, z)$ proizvoljna točka ravnine Π .

1. način

\implies vektori $\vec{T_1T_2}$, $\vec{T_1T_3}$ i $\vec{T_2T_3}$ leže u istoj ravnini, tj. **komplanarni su**.

\implies njihov mješoviti produkt iznosi 0.

$$\text{tj. } (\vec{T_1T_2} \times \vec{T_1T_3}) \cdot \vec{T_2T_3} = 0$$

odnosno, koordinatno:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

8

Određivanje jednadžbe ravnine koja prolazi kroz tri zadane točke

T_1, T_2, T_3 - zadane nekolinearne točke

$T(x, y, z)$ proizvoljna točka ravnine Π

2. način

Opća jednadžba ravnine Π glasi: $Ax + By + Cz + D = 0$

i nju zadovoljavaju sve točke ravnine Π , pa tako i: T, T_1, T_2, T_3

$$\Rightarrow \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0 \end{cases}$$

Homogen sustav

Ako je njegova determinanta jednaka 0, onda on ima netrivialna rješenja.

(tj. postoje takvi A, B, C, D za koje sustav vrijedi, a da nisu svi istovremeno jednaki 0)

Dakle:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(Množenjem 2. retka s -1, te dodavanjem 1. 3. i 4. retku, a zatim razvojem determinante po 4. stupcu, dobivamo istu determinantu kao u 1. načinu.)⁹

Kut između dviju ravnina

$$\Pi_1 \dots A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

$$\Pi_2 \dots A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

Kut φ između ravnina Π_1 i Π_2 se definira kao kut što ga međusobno zatvaraju vektori

normala $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ i $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$. (uzima se manji od dva suplementna kuta)

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (0 \leq \varphi \leq 90^\circ)$$

• paralelne ravnine

$\varphi = \angle(\Pi_1, \Pi_2) = 0 \implies$ vektori normala su paralelni, odn. kolinearni

$$\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2 \quad \text{tj.} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \lambda \quad (\lambda \neq 0)$$

• okomite ravnine

$\varphi = \angle(\Pi_1, \Pi_2) = 90^\circ \implies$ vektori normala su okomiti

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad \text{tj.} \quad A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

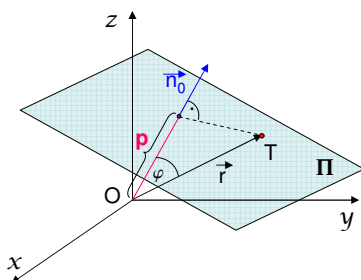
10

Normalni oblik jednačbe ravnine

$\Pi \dots Ax + By + Cz + D = 0$ jednačba ravnine (opći oblik)

⇒ Vektor normale: $\vec{n} = \{A, B, C\}$

Jedinični vektor u smjeru vektora normale: $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\{A, B, C\}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$
($|\vec{n}_0| = 1$)



Označimo: $p = d(O, \Pi)$

Neka je:

$T(x, y, z)$ - proizvoljna točka ravnine Π

$\vec{r} = \vec{OT}$ - radij-vektor točke T

Projekcija vektora \vec{r} na \vec{n}_0 je p.

$$p = \text{proj}_{\vec{n}_0} \vec{r} = |\vec{r}| \cdot \cos \varphi = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}_0}{|\vec{n}_0|} = \vec{r} \cdot \vec{n}_0 = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma$$

$$\Rightarrow x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma - p = 0$$

NORMALNI OBLIK JEDNAČBE RAVNINE

11

Veza između općeg i normalnog oblika jednačbe ravnine:

normalni oblik: $x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma - p = 0 \quad / \cdot \lambda \quad (\lambda \neq 0)$

$$x \cdot \lambda \cos \alpha + y \cdot \lambda \cos \beta + z \cdot \lambda \cos \gamma + (-\lambda p) = 0$$

$$\Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{opći oblik}$$

⇒ Ako opći oblik podijelimo s odgovarajućim brojem λ ($\lambda \neq 0$), onda dobijemo normalni oblik.

Broj λ odredimo iz jednakosti: $A^2 + B^2 + C^2 = \lambda^2 (\underbrace{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma}_{=1}) = \lambda^2$

$$\text{tj. } \lambda = \pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

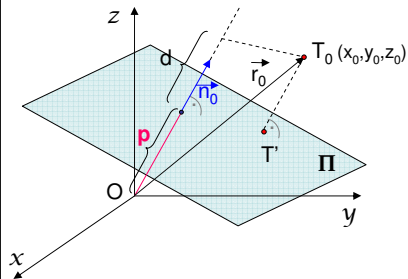
Predznak + ili - se bira prema predznaku od D, tako da udaljenost p bude pozitivna. ($D = -\lambda p$)

$$\Rightarrow \lambda = -\text{sign}D \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$\Rightarrow \frac{Ax + By + Cz + D}{-\text{sign}D \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \quad \text{NORMALNI OBLIK JEDNAČBE RAVNINE}$$

12

Udaljenost točke od ravnine



Neka je $T_0(x_0, y_0, z_0)$ neka točka u prostoru.

$$d(T_0, \Pi) = d(T_0, T') \quad (T' \text{ je projekcija točke } T_0 \text{ na } \Pi)$$

Projekcija $\vec{r}_0 = \vec{OT}_0$ na jedinični vektor \vec{n}_0 je:

$$\text{proj}_{\vec{n}_0} \vec{r}_0 = \begin{cases} p + d, & \text{ako su } O \text{ i } T_0 \text{ s različitih strana ravnine } \Pi \\ p - d, & \text{ako su } O \text{ i } T_0 \text{ s iste strane ravnine } \Pi \end{cases}$$

pri čemu je $d = d(T_0, \Pi)$

$$\Rightarrow d = \text{proj}_{\vec{n}_0} \vec{r}_0 - p = x_0 \cdot \cos \alpha + y_0 \cdot \cos \beta + z_0 \cdot \cos \gamma - p \quad \text{odn.} \quad d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{-\text{sign}D \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Dakle, udaljenost točke T_0 od ravnine se dobije tako da se u normalni oblik jednadžbe ravnine uvrste koordinate točke T_0 .

Predznak ovako dobivene udaljenosti:

$d > 0$, ako su O i T_0 s različitih strana ravnine Π

$d < 0$, ako su O i T_0 s iste strane ravnine Π

13