IV. REDOVI

I. DIO (Brojevni redovi)

dr. sc. Mirna Rodić Lipanović – 2009./2010.

Osnovno o nizovima

Niz (a_n) je funkcija a: **N** → S.

Svakom prirodnom broju pridružujemo jedan element skupa S.

$n \mapsto a_n$, $a_n \in S$

a_n – opći član niza

Primjeri:

1.) $a_n = n$

2.) $a_n = \frac{1}{n}$

3.) $a_n = 1$ stacionaran niz

4.) $a_n = (-1)^n$

5.) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$

Omeđen niz: postoje m i M takvi da za svaki n∈**N** vrijedi: $m \leq a_n \leq M$

Rastući niz: za svaki n∈**N** vrijedi: $a_n \leq a_{n+1}$

Padajući niz: za svaki n∈**N** vrijedi: $a_n \geq a_{n+1}$

(Rastući i padajući nizovi:) **monotoni nizovi**

Osnovno o nizovima (nastavak)

Limes (granična vrijednost) niza: $\lim_{n\to\infty} a_n = A$

(ako se niz brojeva približava nekoj vrijednosti)

Ako niz ima limes . . . **konvergentan niz**

inače . . . **divergentan niz**

Pr. $a_n = \frac{1}{n}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ konvergentan niz

Neki važniji limesi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad , \text{ za } a>0$$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \quad , \text{ za } |a|<1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Pojam (brojevnog) reda

Neka je (a_n) niz realnih brojeva. (tj. niz $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$)

Izraz $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se zove **beskonačni RED .**

a_n – n-ti član reda (opći član)

Primjer: Napišite red čiji je opći član: $a_n = \frac{1}{2^n}$

Pojam sume i konvergencije reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \ldots \qquad (*)$$

Može li se gornjem izrazu pridružiti neki broj kao "suma" ?

Promatramo **niz parcijalnih suma** :

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \qquad \text{n-ta parcijalna suma}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Za red $(*)$ kažemo da je **KONVERGENTAN**, ako niz njegovih parcijalnih suma (S_n) konvergira prema nekom broju S, tj. ako je $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Broj S zovemo **SUMA BESKONAČNOG REDA,** i pišemo $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ako niz (S_n) divergira, onda za red $(*)$ kažemo da je divergentan.

(Preciznije, ako (S_n) divergira prema $+\infty$ ili prema $-\infty$, onda kažemo da red divergira u užem smislu a ako (S_n) oscilira, onda kažemo da red divergira u širem smislu .)

Geometrijski red

(jedan od najvažnijih beskonačnih redova)

Red u kojem je kvocijent susjednih članova konstantan.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad (\text{n}=2,3,\ldots)$$

Ako su svi članovi realni i pozitivni, onda je: $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$ (n=2,3,...)

Označimo $q = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$. Tada je $a_n = a_{n-1} \cdot q$.

$$\Longrightarrow \quad a_2 = a_1 \cdot q \ , \ a_3 = a_1 \cdot q^2 \ , \ a_4 = a_1 \cdot q^3 \ , \ldots , \ \boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}} \ , \ldots$$

opći član geometrijskog reda

$$\Longrightarrow \quad \boxed{a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}}$$

GEOMETRIJSKI RED

Geometrijski red (nastavak)

$$a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$$

Parcijalna suma geometrijskog reda:

Ako je $q \neq 1$, onda:

$$\left.\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} \quad / \cdot q \\ q \cdot S_n &= a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \cdots + a_1 \cdot q^n \end{aligned}\right\} -$$

$$S_n - q \cdot S_n = a_1 - a_1 \cdot q^n$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}}$$

Konvergencija geometrijskog reda:

- Za $a_1 \neq 0$ i $|q| < 1$ $\Longrightarrow$ $\boxed{S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}}$
- Za $a_1 \neq 0$ i $|q| > 1$ $\Longrightarrow$ za $q > 1$: $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} \cdot \lim_{n\to\infty}(1-q^n) = \pm\infty$ (+/- ovisno o predznaku od a_1)
  $\Longrightarrow$ za $q < -1$: niz (S_n) oscilira (ide prema + ∞ i $-\infty$)
- Za $a_1 \neq 0$ i $|q| = 1$ $\Longrightarrow$ za $q = 1$: $S_n = n \cdot a_1$ $\Longrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ (+/- ovisno o predznaku od a_1)
  $\Longrightarrow$ za $q = -1$: $S_n = a_1 - a_1 + a_1 - a_1 + \ldots$ $\Longrightarrow$ (S_n) divergira u širem smislu

$\Longrightarrow$ Geometrijski red **konvergira za $|q| < 1$** i suma mu je $S = \frac{a_1}{1-q}$, a **divergira za $|q| \geq 1$**

Ostatak reda

Razliku između sume beskonačnog konvergentnog reda i n-te parcijalne sume zovemo **ostatak reda**.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}_{\text{n-ta parcijalna suma}} + \underbrace{a_{n+1} + \ldots}_{\text{ostatak reda}}$$

$$S = S_n + R_n \qquad (\mathbf{R_n = S - S_n})$$

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

Ako je red konvergentan, onda će za dovoljno veliko n, ostatak biti po volji malen; i obratno.

tj.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

Osnovna svojstva konvergentnog reda

Teorem 1: **(nužan uvjet konvergencije)**

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, onda je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Obrat ne mora vrijediti!!!

Paziti! $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \not\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan

Ali, **ako je** $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ **, onda je red divergentan.**

Primjer: tzv. harmonijski red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \ldots$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, a red je divergentan.

9

Osnovna svojstva konvergentnog reda (nastavak)

Teorem 2:

Ako red konvergira, onda konvergira i svaki njegov ostatak.

Ako konvergira neki ostatak nekog reda, onda konvergira i sam red.

Teorem 3:

Ako su redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentni, onda su konvergentni i redovi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$.

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pomnožimo s nekim brojem c≠0 (tj. sve članove pomnožimo s c≠0), dobijemo red $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$.

Teorem 4:

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira i suma mu je S, onda konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ i suma mu je c·S.

10

Redovi s pozitivnim članovima

Problem:

- da li red konvergira ?
- ako “da”, izračunati tu sumu.

Kriteriji konvergencije

- Pravila pomoću kojeg se ispituje konvergencija reda, i to na osnovu nekog svojstva općeg člana tog reda

- Poredbeni kriterij
- D'Alembertov kriterij
- Cauchyjev kriterij
- Raabeov kriterij
- Cauchyjev integralni kriterij

Redovi s pozitivnim članovima. Kriteriji konvergencije

Poredbeni kriterij (kriterij na osnovu uspoređivanja)

Zadani red se uspoređuje s redom za kojeg se zna da li konvergira ili ne.

U tu svrhu služe sljedeći redovi:

- **harmonijski red**

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$ (divergira)

- **geometrijski red**

$$a_1+a_1\cdot q+a_1\cdot q^2+\cdots+a_1\cdot q^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_1\cdot q^{n-1}$$ (konvergira za $|q|<1$, divergira za $|q|\geq 1$)

- **hiperharmonijski red**

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$ (konvergira za $p>1$, divergira za $p\leq 1$)

Teorem: (poredbeni kriterij)

Neka su $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ dva reda s pozitivnim članovima, takvi da je $a_n \leq b_n$ za svaki n.

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ konvergira, onda konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ divergira, onda divergira i red $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$.

Redovi s pozitivnim članovima. Kriteriji konvergencije

D'Alembertov kriterij

Teorem:

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red s pozitivnim članovima, takav da postoji

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k \qquad (\text{ k konačan ili beskonačan }) \ .$$

Ako je **k<1** , onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

Ako je **k>1** , onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Za k=1 (ili ako limes ne postoji) ovaj kriterij ne daje odluku.

13

Redovi s pozitivnim članovima. Kriteriji konvergencije

Cauchyjev kriterij ("jači" je od d'Alembertovog)

Teorem:

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red s pozitivnim članovima, takav da postoji

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k \qquad (0 < k < \infty) \ .$$

Ako je **k<1** , onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

Ako je **k>1** , onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Za k=1 (ili ako limes ne postoji) ovaj kriterij ne daje odluku.

14

Redovi s pozitivnim članovima. Kriteriji konvergencije

Raabeov kriterij

(precizniji od d'Alembertovog;
koristi se kada d'Alembertov kriterij ne daje odluku)

Teorem:

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red s pozitivnim članovima, takav da postoji

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = k \qquad \text{(k konačan ili beskonačan) .}$$

Ako je **k>1** , onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

Ako je **k<1** , onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Za k=1 (ili ako limes ne postoji) ovaj kriterij ne daje odluku.

15

Redovi s pozitivnim članovima. Kriteriji konvergencije

Cauchyjev integralni kriterij

Teorem:

Neka je f neprekidna pozitivna nerastuća funkcija za $x \geq 1$, i neka je $a_n = f(n)$ za svaki $n \in \mathbf{N}$.

Ako integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ ima konačnu vrijednost, onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

Ako je $\int_1^{\infty} f(x)\,dx = +\infty$, onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

16

Alternirani (izmjenični) redovi

Redovi čiji članovi naizmjence mijenjaju predznak

Opći oblik:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

gdje je a_n>0 za svaki n.

Kriterij konvergencije

Teorem: (Leibnizov kriterij)

Ako je $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n$ (tj. niz (a_n) pozitivnih brojeva monotono opada)

i vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, onda red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konvergira.

Apsolutno konvergentni redovi

Ako red sadrži i pozitivne i negativne članove (a nije ni alternirani),
onda za njega **ne vrijede** prethodni kriteriji konvergencije.

Definicija:

Za red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kažemo da je **apsolutno konvergentan**, ako konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Teorem:

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira, onda konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dakle, **apsolutno konvergentan red je i konvergentan**.

Obrat općenito ne vrijedi !

Red može biti konvergentan, a da nije i apsolutno konvergentan.

Za takav red kažemo da je **uvjetno konvergentan**.