IV. REDOVI

II. DIO (Redovi funkcija)

dr. sc. Mirna Rodić Lipanović – 2009./2010.

Redovi funkcija

Niz funkcija: $a_1(x), a_2(x), a_3(x), \ldots, a_n(x), \ldots$ $\quad n\in\mathbf{N}$

Red funkcija: $a_1(x)+a_2(x)+a_3(x)+\cdots+a_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ $\quad x\in X$

(Primijetimo: Za fiksiranu vrijednost $x=x_0$, red funkcija postaje brojevni red.)

Konvergencija reda funkcija

Promatramo **niz parcijalnih suma** :

$$S_1(x)=a_1(x)$$
$$S_2(x)=a_1(x)+a_2(x)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n(x)=a_1(x)+a_2(x)+a_3(x)+\cdots+a_n(x)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Niz funkcija $(S_n(x))$, $x\in X$, konvergira na $D\subset X$, ako konvergira kao brojevni niz za $\forall x\in D$.
(D – tzv. područje konvergencije)

Ako niz funkcija $(S_n(x))$, $x\in X$, konvergira na $D\subset X$ prema nekoj funkciji $S(x)$,

tj. ako je $S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)$ $\quad za\ \forall x\in D$,

onda kažemo da red $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ **KONVERGIRA** na skupu D i da je njegova suma $S(x)$.

Zapisujemo: $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$, $x\in D$.

• Red funkcija apsolutno konvergira u točki $x=x_0$, ako u toj točki odgovarajući brojevni red apsolutno konvergira.

Ostatak reda:

$$R_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{n+m}(x)$$ (u redu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ "odbacili" smo prvih *n* članova)

Ako red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ konvergira na skupu D i ima sumu S(*x*), onda je

$$R_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$$
$$= S(x) - S_n(x)$$

i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} [S(x) - S_n(x)] = S(x) - S(x) = 0 \quad .$$

3

Redovi potencija

(specijalni slučaj redova funkcija)

$$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots + a_n(x-c)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

$a_n \in \mathbf{R}$ koeficijenti reda potencija
x varijabla
c realna konstanta

Specijalno za $c=0$ dobivamo red:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

4

Redovi potencija (nastavak)

Svojstva redova potencija: (promatrat ćemo ih za redove oblika: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$)

- Red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergira apsolutno (pa stoga i konvergira) za sve vrijednosti x takve da je $|x| < r$, gdje je r **radijus konvergencije** reda potencija.

  Radijus konvergencije r određujemo (prema d'Alembertovom ili Cauchyjevom kriteriju) sa:

$$\frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \qquad \text{ili} \qquad \frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

  (a_n su koeficijenti reda potencija i pretpostavljamo da su različiti od 0)

- Za x takve da je $|x| > r$, red divergira.
- Na rubu intervala (-r,r) red može konvergirati ili divergirati.

Razvoj funkcije u red potencija (Taylorov i Maclaurinov red)

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija koja na I ima sve derivacije; $c \in I$; te neka su f(x) i sve njene derivacije omeđene.

Tada funkciju f(x) možemo prikazati u obliku reda potencija, konvergentnog na intervalu I:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots + a_n(x-c)^n + \ldots \qquad (*)$$

Trebamo odrediti koeficijente a_n .

- Prvo tražimo derivacije od (*) :

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \cdots + n \cdot a_n (x-c)^{n-1} + \ldots$$
$$f''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2 \cdot a_3(x-c) + \cdots + n\cdot(n-1)\cdot a_n(x-c)^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot a_n + \ldots = n! a_n + \ldots$$

- i sada uvrstimo x=c:

$$f(c) = a_0 \quad \Longrightarrow \quad a_0 = f(c)$$
$$f'(c) = 1\cdot a_1 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = \frac{f'(c)}{1!}$$
$$f''(c) = 2\cdot 1\cdot a_2 \quad \Longrightarrow \quad a_2 = \frac{f''(c)}{2!}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(c) = n! a_n \quad \Longrightarrow \quad a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

$$\Longrightarrow \boxed{f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \ldots}$$

TAYLOROV RED funkcije f(x)

(on predstavlja funkciju f(x) na intervalu konvergencije)

Razvoj funkcije u red potencija (Taylorov i Maclaurinov red) (nastavak)

$$f(x)=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\ldots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

TAYLOROV RED funkcije f(x)

Specijalno, za c=0 dobivamo:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

MACLAURINOV RED funkcije f(x)

Razvoj funkcije u red potencija (Taylorov i Maclaurinov red) (nastavak)

Ostatak reda

Taylorov red možemo pisati:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k+\underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k}_{R_n(x)}$$

ostatak reda

Da bi red $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$ u intervalu konvergencije predstavljao funkciju f(x),

mora biti $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

Razvoj funkcije u red potencija (Taylorov i Maclaurinov red) (nastavak)

Vrijedi:

Teorem:

Ako funkcija f ima sve derivacije na segmentu [-r,r] te postoji broj M takav da je

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M \quad , n=1,2,\dots \quad \text{za } x \in [-r,r]$$

onda funkciju f možemo razviti u red potencija na segmentu [-r,r] .

9

Taylorov polinom

Neka je $I \subseteq R$, $f: I \longrightarrow R$ funkcija koja na I ima sve derivacije do uključivo reda n+1; te neka je $c \in I$.

Tražimo polinom $P_n(x)$ stupnja $\leq n$ $\quad \left(P_n(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n \right)$
tako da vrijedi:

$$P_n(c) = f(c)$$
$$P_n^{(k)}(c) = f^{(k)}(c) \quad , \quad \text{za } \forall\, k=1,2,\dots,n.$$

Analognim postupkom kao prije dobivamo:

$$\Longrightarrow \quad P_n(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Taylorov polinom n-tog stupnja funkcije f(x) .

Polinom $P_n(x)$ aproksimira funkciju f(x) u okolini točke x=c.

Vrijedi $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, gdje je $R_n(x)$ ostatak.

Taj ostatak možemo zapisati:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \quad \text{gdje je} \quad \xi \in (x,c)$$

ili

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \cdot f^{(n+1)}\left(c + \theta(x-c)\right) \quad \text{gdje je} \quad \theta \in (0,1) \; .$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}\left(c + \theta(x-c)\right)$$

Taylorova formula funkcije f u točki x=c

Specijalno, za x=c=0 imamo **Maclaurinovu formulu**

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\theta x) \quad , \quad \theta \in (0,1)$$

10