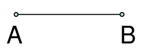
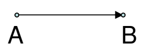
I. VEKTORI

dr. sc. Mirna Rodić Lipanović – 2009./2010.

Pojam vektora

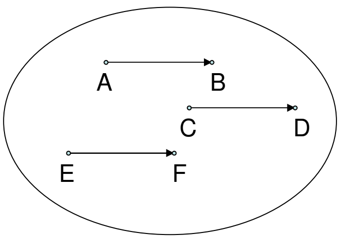


dužina

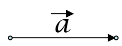


usmjerena (orijentirana) dužina

(zna se koja je točka početna, a koja krajnja)



vektor - klasa ("skup") usmjerenih dužina

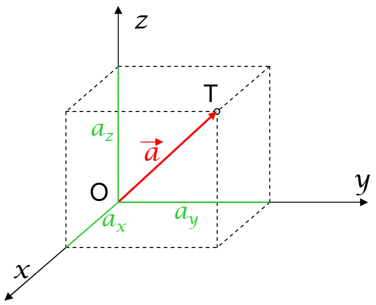


$\overrightarrow{AB}$ je reprezentant vektora $\vec{a}$

Vektor ima: duljinu, smjer i orijentaciju

Dva su vektora jednaka ako imaju jednaku duljinu, smjer i orijentaciju.

Vektor u pravokutnom koordinatnom sustavu



$\vec{a} = \overrightarrow{OT}$ **radij-vektor** točke T

$\vec{a} = \overrightarrow{OT} = \{ a_x, a_y, a_z \}$

T (a_x, a_y, a_z)

$a_x = \text{proj}_x\, \vec{a}$
$a_y = \text{proj}_y\, \vec{a}$
$a_z = \text{proj}_z\, \vec{a}$

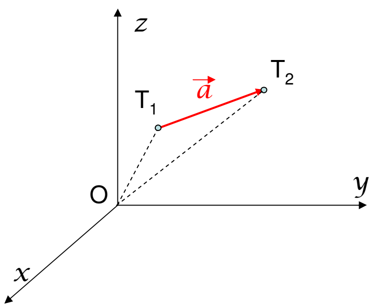
Skalarne komponente vektora

Modul (duljina, apsolutna vrijednost) vektora $\vec{a}$:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

3

Vektor u pravokutnom koordinatnom sustavu (nastavak)



T_1 (x_1, y_1, z_1)

T_2 (x_2, y_2, z_2)

$\overrightarrow{T_1T_2} = \{ x_2 - x_1 , y_2 - y_1 , z_2 - z_1 \}$

$$d (T_1 , T_2) = |\overrightarrow{T_1T_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

4

• **Jedinični vektor (ort)** - vektor čiji je modul jednak 1

jedinični vektor u smjeru vektora $\vec{a}$: $\quad \vec{a}_o = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}\,|}$

jedinični vektor u smjeru osi x : $\vec{\mathbf{i}}$

jedinični vektor u smjeru osi y : $\vec{\mathbf{j}}$

jedinični vektor u smjeru osi z : $\vec{\mathbf{k}}$

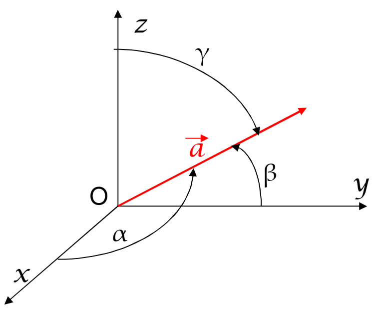
$$\vec{a} = \{\, a_x,\, a_y,\, a_z \,\} \qquad \vec{a} = a_x\vec{\mathbf{i}} + a_y\vec{\mathbf{j}} + a_z\vec{\mathbf{k}}$$

• **Nul-vektor** - vektor čiji je modul jednak 0

- oznaka: $\vec{0}$

• **Kosinusi smjera vektora**

Smjer vektora u prostoru može se zadati i kutevima koje taj vektor zatvara s koordinatnim osima x,y,z



$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a}$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{a}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{a}$$

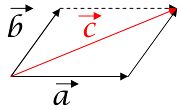
Vrijedi: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Operacije s vektorima

Zbrajanje vektora

- Pravilo paralelograma

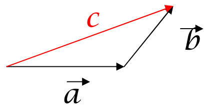
(za vektore s istom početnom točkom)



$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

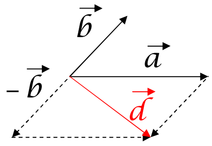
- Pravilo trokuta

(za vektore koji se "nastavljaju")



Oduzimanje vektora

$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

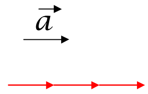


Množenje vektora skalarom

za $n \in \mathbf{N}$

$n \cdot \vec{a} = \vec{a} + \vec{a} + \ldots + \vec{a}$

n pribrojnika



$\vec{b} = 3\vec{a}$

Linearna kombinacija vektora

$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \ldots + \xi \vec{f}$

$\vec{a}, \vec{b}, \ldots, \vec{f}$ - vektori

$\lambda, \mu, \ldots, \xi$ - skalari

Skup od n vektora je **LINEARNO ZAVISAN** ako se neki od njih može prikazati kao linearna kombinacija preostalih

npr. $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \ldots + \xi \vec{f}$

odnosno, ako postoje skalari $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \zeta,$ od kojih je bar jedan različit od 0, takvi da vrijedi:

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} + \ldots + \zeta \vec{f} = \vec{0}$$

Skup od n vektora je **LINEARNO NEZAVISAN**, ako nije linearno zavisan.

Ako je relacija $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} + \ldots + \zeta \vec{f} = \vec{0}$ moguća samo kada je $\alpha = \beta = \gamma = \ldots = \zeta = 0$, onda je taj skup **linearno nezavisan**.

Kolinearni i komplanarni vektori

- Dva vektora su **kolinearna** ako leže na istom pravcu (ili na paralelnim pravcima).

$\vec{a}$ i $\vec{b}$ su **kolinearni** $\Leftrightarrow$ $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su linearno zavisni

tj. jedan se može iskazati pomoću drugog

(npr. $\vec{a} = \lambda \vec{b}$)

Odn. postoje α, β (bar jedan je različit od 0) tako da je $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$

- Tri vektora su **komplanarna** ako leže u istoj ravnini (ili u paralelnim ravninama).

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su komplanarni $\Leftrightarrow$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su linearno zavisni

tj. jedan se može iskazati pomoću preostala dva

(npr. $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$)

Odn. postoje α, β, γ (bar jedan je različit od 0) tako da je $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$

NAPOMENA: 4 vektora u (3D) prostoru su uvijek linearno zavisni!

Skalarni produkt vektora

Skalarni produkt vektora je skalar!!!

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi \quad , \quad \varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

Svojstva:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (komutativnost)
- $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (distributivnost)
- $(\lambda \vec{a})\vec{b} = \vec{a}(\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$, za svaki $\lambda \in \mathbf{R}$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, ako je $\cos\varphi = 0$ tj. ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ okomiti
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

Za jedinične vektore $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vrijedi:

$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ $(= \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{j}$ zbog komutativnosti)

$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$

Skalarni produkt vektora - nastavak

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi \quad , \quad \varphi = \sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$$

Koordinatni zapis:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad (=\{a_x, a_y, a_z\})$$

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} \qquad (=\{b_x, b_y, b_z\})$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

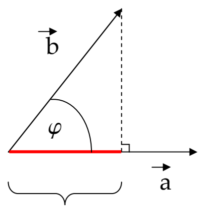
Kut između dva vektora

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

Uvjet okomitosti dva vektora: (uz pretpostavku da je $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$) $(\cos\varphi = 0)$

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 0, \quad \text{tj.} \quad a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

Projekcija vektora na vektor



$$proj_{\vec{a}}\,\vec{b} = |\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{proj_{\vec{a}}\,\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

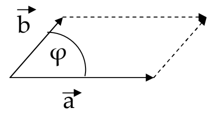
Vektorski produkt vektora

Vektorski produkt vektora je vektor!!!

Vektorski produkt dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u prostoru je novi vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ sa sljedećim svojstvima:

- Duljina vektora c iznosi:

  $$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi \;, \quad \varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

  $|\vec{c}|$ je jednaka iznosu površine paralelograma razapetog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$

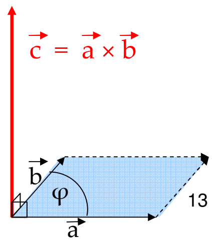
- Smjer:

  Pravac nosioc od $\vec{c}$ je okomit na ravninu u kojoj leže vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$

  tj. $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b}$

- Orijentacija:

  Vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su "desno orijentirani"



Vektorski produkt vektora - nastavak

Svojstva:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (antikomutativnost !!!)
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ (distributivnost)

  $\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}$
- $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$, za svaki $\lambda \in \mathbf{R}$
- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, ako je $\sin\varphi = 0$ tj. ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ paralelni

  Specijalno: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$, za svaki $\vec{a}$

Za jedinične vektore $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vrijedi:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \qquad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \qquad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

Vektorski produkt vektora - nastavak

Koordinatni zapis:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad (= \{a_x, a_y, a_z\})$$

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} \qquad (= \{b_x, b_y, b_z\})$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\,\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\,\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Uvjet kolinearnosti (odn. paralelnosti) dva vektora: $(\sin\varphi = 0)$

(uz pretpostavku da je $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$)

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}, \quad \text{tj.} \quad \begin{matrix} a_y b_z - a_z b_y = 0 \\ a_x b_z - a_z b_x = 0 \\ a_x b_y - a_y b_x = 0 \end{matrix} \quad \text{tj.} \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

Vektorski produkt vektora - primjene

$$P_{▱} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi$$

$$P_{\triangle} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

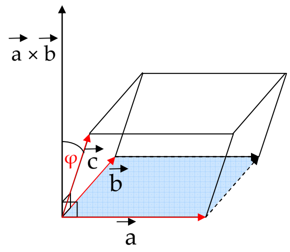
Međusobni produkt tri vektora

$\vec a\cdot\vec b\cdot\vec c$, $\vec a\times\vec b\times\vec c$ - nisu određeni; možemo ih ostvariti na više načina

$\vec{\mathbf a}\cdot\vec{\mathbf b}\times\vec{\mathbf c}$ ili $\vec{\mathbf a}\times\vec{\mathbf b}\cdot\vec{\mathbf c}$ - točno znamo kojim redoslijedom ćemo množiti

Mješoviti vektorski produkt

$$(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c = \underbrace{\underbrace{|\vec a\times\vec b|}_{\substack{P_{\text{▱}}\\ \text{(baza)}}}\cdot\underbrace{|\vec c|\cdot\cos\varphi}_{\substack{proj_{\vec a\times\vec b}\,\vec c\\ \text{(visina)}}}}_{\pm\text{ Volumen paralelepipeda}} \quad , \quad \varphi = \sphericalangle(\vec a\times\vec b, \vec c)$$



Primjene:

$\mathbf{V}_{\text{paralelepipeda}} = |(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c|$ (= Baza · visina)

$\mathbf{V}_{\text{piramide}} = \frac{1}{3}$ Baza · visina

$\mathbf{V}_{\text{tetraedra}} = \frac{1}{6}\,|(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c|$ (Baza je trokut!)

Mješoviti vektorski produkt - nastavak

Koordinatni zapis:

$$(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c = (a_y b_z - a_z b_y)\cdot c_x + (a_z b_x - a_x b_z)\cdot c_y + (a_x b_y - a_y b_x)\cdot c_z$$

$$(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Uvjet komplanarnosti vektora $\vec a, \vec b, \vec c$:

$\mathbf{V}_{\text{paralelepipeda}} = 0$, odn. $(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c = 0$ tj. $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$