Kombinatorika

Ksenija Smoljak i Kristina Krulić

26. veljače 2009.

Uvod

Kombinatorika je grana matematike koja se bavi prebrojavanjem konačnih skupova.

Primjer

Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 20 koji su ili parni ili prosti?

Primjer

Ekipni susreti u stolnom tenisu igraju se tako da svaki igrač iz jedne ekipe igra protiv svakog igrača druge ekipe. Ako se svaka ekipa sastoji od tri igrača, koliki je ukupni broj igara?

Kartezijev umnožak skupova

Neka su A, B neprazni skupovi. Kartezijev umnožak skupova A i B je skup $A \times B$ čiji su elementi uređeni parovi (a, b), pri čemu je $a \in A$, $b \in B$.
Pišemo $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

Broj elemenata Kartezijeva umnoška: Ako skup A ima p elemenata, a skup B t elemenata, onda Kartezijev umnožak $A \times B$ ima $p \cdot t$ elemenata.
Pišemo $k(A \times B) = k(A) \cdot k(B)$.

Neka su $S_1, S_2, \ldots, S_k$ neprazni skupovi. Kartezijev umnožak tih skupova je skup $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_k$ čiji su elementi uređene k-torke $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ takve da je $s_i \in S_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Princip uzastopnog prebrojavanja

Primjer

Koliko postoji različitih četveroznamenkastih brojeva?

Princip uzastopnog prebrojavanja Ako element s_1 iz skupa S_1 možemo izabrati na n_1 načina, nakon toga (bez obzira koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, zatim element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, \ldots, s_k$ jednak $N = n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k$.

Varijacije s ponavljanjem

Neka je $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ zadani skup. Biramo k elemenata skupa S pazeći na njihov poredak s time da se elementi mogu ponavljati. Riječ je o broju elemenata u Kartezijevom umnošku k istovjetnih skupova. Njihov broj je n^k.

Primjer

Jedan test ima 20 pitanja na koje se odgovara sa DA ili NE. Koliko je mogućnosti popunjavanja testa?

Primjer

Sportska prognoza ima 13 redaka. U svakom retku treba prekrižiti jedan od tri znaka: 0,1 ili 2. Na koliko se načina to može učiniti?

Varijacije bez ponavljanja

Uređena k-torka različitih elemenata istog skupa $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ naziva se varijacija k-tog razreda u skupu od n elemenata ($k \leq n$).
Broj varijacija $N = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)$.
(prvi element biramo na n načina, nakon toga drugi možemo odabrati na $n-1$ način jer mora biti različit od prvog...)

Primjer

Na koliko se različitih načina može podijeliti 4 različita poklona između 4 osobe?

Zadaci

1. Koliko različitih telefonskih brojeva postoji ako su brojevi šesteroznamenkasti, a prva znamenka nije jednaka nuli?
2. Koliko ima troznamenkastih brojeva čije su sve znamenke različite?
3. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva čije su proizvoljne dvije susjedne znamenke različite?
4. Koliko se različitih registracijskih pločica može sastaviti ako svaka sadrži 3slova pa onda 2 znamenke? (uzimamo u obzir 22 slova abecede)

Zadaci

5. Satničar treba staviti u satnicu jedan sat matematike svaki radni dan u tjednu. Ako razred ima ponedjeljkom i četvrtkom 7 sati, utorkom i srijedom 6, a petkom 5 na koliko se načina to može učiniti? Izračunajte na koliko se načina može staviti jedan sat matematike u raspored svaki radni dan u tjednu ako matematika ne može biti 1. sat ponedjeljkom i zadnja 2 sata petkom?
6. Školska knjižnica sadrži 28 knjiga iz matematike, 16 iz fizike, 10 iz kemije i 15 iz biologije. Na koliko načina učenik može uzeti po jednu knjigu iz ta četiri predmeta?
7. Test na razredbenom postupku ima 40 zadataka. Pristupnik u svakom zadatku može zaokružiti jedan od 5 ponuđenih odgovora ili ostaviti zadatak neodgovorenim. Na koliko se različitih načina može odgovoriti na zadani test?

Zadaci

8. Koliko se peteroznamenkastih brojeva može zapisati znamenkama 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ako se nula ne smije naći na prvom, niti na posljednjem mjestu, a sve znamenke moraju biti različite?
9. Koliko dijagonala ima *n*-terokut?
10. Na koliko se načina može podijeliti zlatna, srebrna i brončana medalja između 8 natjecatelja?
11. Koliko šesteroznamenkastih brojeva postoji kojima je:
    a) prva znamenka paran broj
    b) druga i posljednja znamenka neparan broj?
12. Koliko različitih peteroznamenkastih brojeva postoji koji:
    a) ne sadrže znamenku 1
    b) sadrže točno jednu znamenku 1
    c) sadrže barem jednu znamenku 1?

Permutacije

Permutacija skupa $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ od n različitih elemenata je uređena n-torka njegovih članova.
Broj različitih permutacija s n elemenata označavamo sa P_n.

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

(prvi element možemo izabrati na n načina, drugi element možemo nakon toga izabrati na $n-1$ načina,...,posljednji element možemo izabrati samo na jedan način jer je jedini preostao)

Primjeri

Primjer

Neka je $S = \{1, 2, 3\}$. Koliko ima permutacija tog skupa i koje su to permutacije?

Primjer

Koliko se različitih (smislenih i besmislenih) riječi može sastaviti od svih slova riječi POVIJEST ako

a) slova možemo postavljati po volji

b) suglasnici dolaze na prvo, treće, peto, sedmo i osmo mjesto (kao i u početnoj riječi)?

Primjeri

Primjer

Na koliko se načina deset različitih predmeta može podijeliti između 10 osoba?

Primjer

Na jednu predstavu dolazi pet bračnih parova. Na koliko različitih načina oni mogu sjesti na 10 stolica u istom redu ako

a) mogu sjediti po svojoj volji
b) svaki bračni par mora sjediti jedan do drugoga
c) jedna do druge ne smiju sjediti dvije osobe istog spola?

Permutacije s ponavljanjem

Neka u nizu $s_1, s_2, \ldots, s_n$ postoji prva skupina od k_1 identičnih elemenata, druga skupina od k_2 identičnih elemenata,. . . ,r-ta skupina od k_r identičnih elemenata, $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$.
Bilo koji razmještaj elemenata takva niza nazivamo permutacijom s ponavljanjem.

Njihov ukupni broj označavamo $P_n^{k_1,\ldots,k_r} = \dfrac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \cdots \cdot k_r!}$

Primjeri

Primjer

Koliko se različitih riječi može napisati od slova riječi MATEMATIKA?

Primjer

Koliko 8-znamenkastih brojeva možemo napisati pomoću brojeva 1, 1, 1, 3, 3, 3, 7, 7?

Kombinacije

U mnogim problemima prebrojavanja **poredak izabranih elemenata nije bitan**.
Na koliko se načina može izvući k elemenata iz skupa S od n elemenata ne pazeći na njihov poredak?
Označimo taj broj sa C_n^k.
C_n^k je jednak broju različitih podskupova s k elemenata uzetih iz skupa S od n elemenata. Svaki podskup od k različitih elemenata skupa S nazivamo kombinacijom u skupu S.
Broj različitih kombinacija jednak je $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

Primjeri

Primjer

Na koliko se načina u igri LOTO može izvući 7 brojeva i jedan dopunski broj od 39 zadanih?

Primjer

Košarkaški tim raspolaže s 3 centra, 4 krila i 5 braniča. Igru započinje jedan centar, dva krila i dva braniča. Na koliko načina trener može izabrati početnu petorku?

Primjeri

Primjer

Na zaslonu računala pojavljuju se brojevi zapisani sa 8 znamenaka (a mogu počinjati s nulama). Koliko različitih brojeva postoji koji

a) sadrže točno tri znamenke 5
b) sadrže tri znamenke 5, tri znamenke 2 i dvije znamenke 7
c) sadrže točno tri jednake znamenke (preostalih 5 međusobno su različite)?

Primjeri

Primjer

Snop se sastoji od 52 karte i to 13 karata različite jakosti u svakoj od 4 boje. Na koliko se načina mogu odabrati:

a) dvije karte iste boje
b) dvije karte različitih boja
c) dvije karte iste jakosti
d) dvije karte različitih jakosti?

Sadržaj